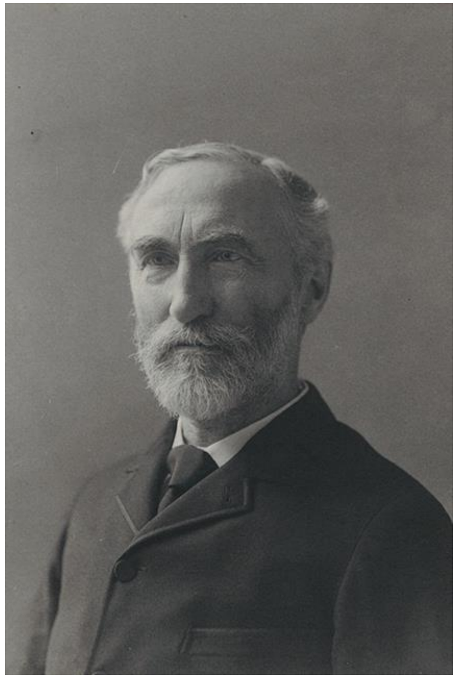
Vektor & Matriks

Dosen : Johansen Cruyff Mandey

Sejarah Vektor



Josiah Willard Gibbs
(1839-1903)

Ilmu Vektor yang kita kenal sekarang digagaskan oleh Josiah Willard Gibbs, seorang ilmuwan Amerika Serikat kelahiran New Haven, Connecticut, Amerika Serikat pada 28 April 1903.

Sebelum Josia Gibbs, Ilmu Vektor sendiri memiliki perjalanan panjang dan memiliki banyak pengaruh dari ilmuwan-ilmuwan, antara lain :

- Casper Wessel (1745-1818)
- Jean Robert Argand (1768-1822)
- Carl Friedrich Gauss (1777-1855)
- William Rowan Hamilton (1805–1865)
- August Ferdinand Mobius (1790–1868)
- Hermann Grassmann (1809-1877)
- Benjamin Peirce (1809-1880)
- James Clerk Maxwell (1831-1879)
- William Kingdon Clifford (1845-1879)

Josiah Willar Gibbs dan Ilmu Vektor

Gibbs diangkat sebagai Profesor Fisika Matematika di Yale pada tahun 1871. Gibbs yang memiliki sarana sendiri belum mempublikasikan apapun ditugaskan untuk mengajar mahasiswa pascasarjana eksklusif dan bekerja tanpa gaji. Gibbs mulai serius mempublikasikan karyanya pada usianya yang ke-34 tahun. Gibbs mulai menaruh perhatian kepada bidang termodinamika dan apa yang ia sebut sebagai *statistical mechanics*. Dari pekerjaannya inilah kita sekarang mengenal yang kita pelajari sebagai kalkulus vektor modern.

Pada tahun 1881 Gibbs mempublikasikan papernya yang menjadi kunci ilmu kalkulus vektor modern yang berjudul "*Element of Vector Analysis*". Pada tahun-tahun tersebut juga muncul ilmuwan terkemuka Oliver Heavisde dalam dunia analisis vektor.

Definisi Vektor

Vektor adalah gambar digital hasil kombinasi titik dan garis melalui proses rumus matematika sehingga membentuk poligon untuk membentuk objek gambar tertentu. Salain itu ada juga pendapat dari brtbagai ilmuan diantarannya :

- Mengutip Kiddle, gambar vektor atau grafik vektor yang disebut juga pemodelan grafis atau grafik berorientasi objek adalah jenis grafik komputer. Grafik vektor menggunakan objek geometris, seperti titik, garis, kurva, dan poligon untuk memodelkan gambar.
- Menurut Encyclopaedia Britannica, grafik vektor adalah format gambar komputer berbasis matematis.
- Melansir dari Tech Ease, grafik vektor adalah gambar grafik komputer yang didefinisikan dalam bentuk titik pada bidang Kartesius, yang dihubungkan oleh garis dan kurva untuk membentuk poligon dan bentuk lainnya.

Kesamaan dua vector

Dua buah vektor disebut sejajar (parallel) apabila garis yang merepresentasikan kedua buah vektor sejajar,

Kesejajaran dua vektor

Dua buah vektor dikatakan sama apabila keduanya memiliki panjang dan arah yang sama..

Pembahasan Vektor

Panjang Vektor

Panjang sebuah vektor adalah jarak dari titik pangkal ke titik ujung vektornya. Karena secara aljabar, titik pangkal vektor dan titik ujung vektor dalam bentuk koordinat baik dimensi dua maupun dimensi tiga, maka Panjang vektor dapat ditentukan dengan menggunakan rumus jarak dua titik.

>Untuk mencari panjang sebuah vektor dalam dimensi dua digunakan cara:

Misalkan vektor $a = (a1, a2)$

Panjang vektor $a = |a| = \sqrt{a1^2 + a2^2}$

>Panjang vektor dimensi Tiga:

Misalkan vektor $\vec{b} = (b1, b2, b3)$

Misalkan vektor $\vec{b} = |\vec{b}| = \sqrt{b1^2 + b2^2 + b3^2}$

Dimensi dua:

Misalkan diketahui titik $A(a1, a2)$ dan $B(b1, b2)$

Panjang vektor $\vec{AB} = |\vec{AB}| = \sqrt{(b1 - a1)^2 + (b2 + a2)^2}$

Panjang vektor $\vec{BA} = |\vec{BA}| = \sqrt{(a1 - b1) + (a2 - b2)^2}$

Dimensi tiga:

Misalkan diketahui titik $A(a1, a2, a1)$ dan $B(b1, b2, b3)$

$|\vec{AB}| = \sqrt{(b1 - a1)^2 + (b2 - a2)^2 + (b3 - a3)^2}$

$|\vec{BA}| = \sqrt{(a1 - b1)^2 + (a2 - b2)^2 + (a3 - b3)^2}$

Dengan $|\vec{AB}| = |\vec{BA}|$

Contoh Soal:

1). Tentukan panjang vektor masing-masing berikut ini:

a. Vektor $\vec{a} = (3 - 3)$

b. Vektor $\bar{b} = (1, -1,5)$

c. Vektor $\overrightarrow{AB}$ dengan koordinat titik $A(1,2)$ dan $B(-2,3)$

d. Vektor $\overrightarrow{CD}$ dengan koordinat titik $C(0, -1,3)$ dan $D(-2,0,1)$

Penyelesaian:

a). Vektor $\vec{a} = (3 - 3)$

Panjang vektor $\vec{a}$ adalah:

$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$

b). Vektor $\bar{b} = (1, -1,5)$

Panjang vektor $\vec{b}$ adalah:

$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 1 + 25} = \sqrt{27}$

c). Vektor $\overrightarrow{AB}$ dengan koordinat titik $A(1,2)$ dan $B(-2,3)$

-Cara pertama:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

-Cara kedua:

Pertama kita cari dulu vektor $\overrightarrow{AB}$:

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2 - 1,3 - 2) = (-3,1)$

Dan hasilnya:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(3)^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

d). Vektor $\overrightarrow{CD}$ dengan koordinat titik $C(0, -1,3)$ dan $D(-2,0,1)$

-Cara pertama:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (0 - (-1))^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$

-Cara kedua:

$\overrightarrow{CD} = D - C = (-2 - 0,0 - (-1), 1 - 3) = (-2,1, -2)$

$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$

Vektor Satuan

Vektor satuan adalah suatu vektor dengan panjang “satu”. Umumnya dituliskan dalam menggunakan “topi”, sehingga: $\hat{u}$ dibaca “u-topi” (‘u-hat’). Suatu vektor ternomalisasi $\hat{u}$ dari suatu vektor **u** bernilai tidak nol, adalah suatu vektor yang berarah sama dengan **u**, yaitu:

$$\hat{u} = \frac{u}{\|u\|}$$

Di mana $\|u\|$ adalah norma (atau panjang atau besar) dari **u.** Istilah *Vektor ternormalisasi* kadang-kadang digunakan sebagai sinonim dari *vektor satuan*. Dalam gaya penuliasan yang lain (tidak menggunakan **huruf tebal**) adalah dengan menggunakan panah di atas suatu variable, yaitu

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{u}}{u}\,.$$

Di sini adalah vektor yang dimaksud dan u adalah besaranya.

Vektor nol (null vector)

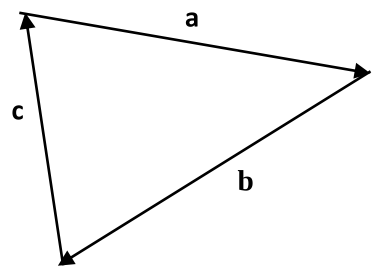
Vektor nol dalam matematika, adalah suatu unsur dalam suatu ruang vektor yang dalam penalaran mempunnyai besaran “nol”. Vektkor nol ditulis dalam koordinat sebagai (0,0,0_, dan biasanya diberi lambing $\vec{0}$, atau **0**. Vektor ini berbeda dengan vektor lain, dimana vektkor ini tidak dinormalisasi (maksudnya, tidak ada vektor satuan yang merupakan kelipatan vektor nol). Jumlah vektor nol dengan vektor apapun **a** adalah **a** (yaitu, **0+a=a**). Dapat juga disimpulkan bahwa vektor nol adalah hasil penjumlahan dari beberapa vektor yang hasilnya 0 (nol) atau dengan kata lain, adalah vektor resultan yang nilainya nol.

Contoh vektor nol :

•Misalkan terdapat 3 buah vektor, yaitu a,b, dan c menghasilkan resultan sama dengan nol. Maka secara matematmis, resultan j=hasil penjumlahannya dirumuskan sebagai berikut:

a + b + c = 0

Dan dengan menggunakan metode grafis dalam hal ini adalah metode segitiga, maka ketiga vektor tersebut dgambarkan sebagai berikut:



Penjelasan gambar : Pangkal vektor **c** bertemu dengan ujung vektor **b** dan ujung vektor c bertemu dengan pangkal vektor **a**, karena tidak terdapat ujung dan pangkal vektor yang bertemu ujung dan pangkal vektor yang lain, maka vektor resultan pada gambar 2 merupakan vektor nol dan secara matematis, resultan penjumlahan ketiga vektor ditulis: **a + b + c = 0**

Operasi Vektor

Perkalian skalar

Sebuah vektor dapat dikalikan dengan scalar yang akan menghasilkan vektor juga, vektor hasil adalah:

r**a** = (ra_1)**i** + (ra_2)**j** + (ra_3)**k**

Penambahan vektor dan pengurangan vektor

Sebagai contoh vektor **a**=a_1**i** + a_2**j** + a_3**k** dan **b**=b_1**i** + b_2**j** + b_3**k**. Hasil dari **a** ditambah **b** adalah:

a + **b** = $(a_1 + b_1)$**i** + $(a_2 + b_2)$**j** + $(a_3 + b_3)$**k**

Pengurangan vektor juga berlaku dengan cara menggaanti tanda “+” menjadi tanda “–“.

Fungsi Vektor Secara Matematika

Secara matematisnya, dijelaskan fungsi dari vektor itu ialah sebagai berikut: Jika untuk setiap nilai skalar u dikaitkan dengan suatu vektor A, maka A dinamakan suatu fungsi u yang dilambangkan dengan A(u). Dalam tiga dimensi ditulis A(u) = A1(u)i + A2(u)j + A3(u)k. Kita kadang-kadang menyatakan bahwa sebuah fungsi vektor A(x, y, z) mendefinisikan suatu medan vektor karena mengaitkan suatu vektor dengan setiap titik di suatu daerah. Dengan cara yang sama 4(x, y, z) mendefinisikan suatu medan skalar karena mengaitkan suatu skalar dengan setiap titik di suatu daerah. Limit, kontinuitas dan turunan fungsi vektor mengikuti aturan yang serupa untuk fungsi skalar yang bersangkutan. Pernyataan berikut menunjukkan kesamaan yang ada.

1. Fungsi vektor A(u) dikatakan kontinu di u0 jika diberikan suatu bilangan positif , kita dapat menentukan suatu bilangan positif. Sehingga < bilamana < . Hal ini ekivalen dengan pernyataan = A(u0).

2. Turunan dari A(u) didefinisikan sebagai dengan syarat limit ini ada. Jika A(u)=A1(u)i+A2(u)j+A3(u)k ; maka, Konsep yang sama akan berlaku untuk turunan lebih tinggi seperti dst.

Contoh fungsi vektor;
misalnya persamaan dari gerakan bebas suatu partikel dalam ruang. Jika setiap titik dalam suatu ruang (R3) dikaitkan dengan suatu vektor, maka ruang tersebut disebut medan vektor. Contoh medan vektor, misalnya aliran fluida (gas, panas, air dan sebagainya) dalam suatu ruangan. Sembarang fungsi yang tidak dikaitkan dengan vektor disebut fungsi skalar, dan suatu ruang yang setiap titiknya tidak dikaitkan dengan suatu vektor disebut medan scalar. Contoh medan skalar, misalnya temperatur sembarang titik dalam suatu ruang atau batang besi, pada suatu saat.

Fungsi Vektor dalam Penerapan Sehari - hari

1. Dalam Navigasi

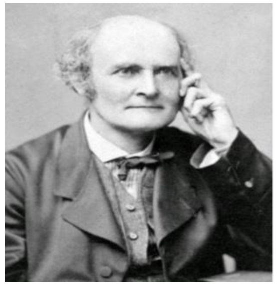
Dalam navigasi, vektor berpengaruh besar terhadap keberadaan suatu lokasi ditinjau dari tempat yang bergerak (kendaraan atau lainnya). Teknologi ini disebut Global Positioning System atau GPS. Sistem ini memberitahukan lokasi di permukaan bumi walaupun tempatnya bergerak. Sehingga, suatu kendaraan dapat tahu keberadaannya dan dimana lokasi tujuannya. Peralatan navigasi membutuhkan perhitungan vektoris yang sudah dikalibrasikan dengan alat ukur sehingga menghasilkan keluaran manual atau digital. Keluaran itu dapat dibaca pada pada alatukur yang menera besar dan arah secara bersamaan, sehingga bermanfaat bagi orang yang memantaunya.

2. Dalam Sains Komputer

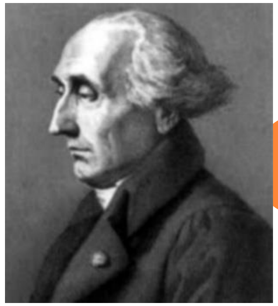
Dalam sains computer, vektor digunakan untuk pembuatan gravis. Grafis adalah gambar yang tersusun dari koordinat-koordinat. Dengan demikian sumber gambar yang muncul pada layer monitor komputer terdiri atas titik-titik yang mempunyai nilai koordinat. Layar Monitor berfungsi sebgai sumbu koordinat x dan y. Grafis vektor adalah objek gambar yang dibentuk melalui kombinasi titik-titik dan garis dengan menggunakan rumusan matematika tertentu.

SEJARAH MATRIKS

Matriks pertama kali diperkenalkan oleh Arthur Cayley (1821-1895) pada tahun 1859 di Inggris dalam sebuah studi system persamaan linear dan transformasi linear. Dan pertemuan matriks juga dibantu oleh teman Arthur Cayley, yaitu James Sylvester. Dan juga Pierre Frederic Sarrus (1798-1861) menemukan aturan mnemonic untuk memecahkan determinan dari matriks berordo 3 x 3.



Pemberitahuan : Gambar Arthur Cayley (1), James Sylvester (2), Pierre Frederic (3)



Pengertian Matriks

Matriks adalah susunan bilangan-bilangan berbentuk persegi Panjang yang diatur dalam baris atau kolom dengan dibatasi kurung.

Baris adalah susunan bilangan-bilangan yang mendatar (horizontal)

Kolom adalah susunan bilangan-bilangan yang tegak (vertikal)

Ordo Matriks adalah banyaknya elemen kolom dari suatu matriks

- Suatu daftar bilangan real atau kompleks terdiri atas m baris dan n kolom, m dan n bilangan bulat positif, disebut matriks berukuran **m x n**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A_{ij} –

i = 1, 2,…… m (menyatakan baris)

j = 1, 2,…… n (menyatakan kolom)

Macam-macam Matriks

Terdapat beberapa macam matriks, antara lain :

1. Matriks persegi
2. Matriks diagonal
3. Matriks identitas
4. Matriks segitiga atas/ bawah
5. Matriks transpose
6. Matriks simetri
7. Matriks 0/1
8. Matriks invers

1. Matriks Persegi

- Matriks persegi merupakan matriks yang memilki banyak baris & banyak kolom yang sama.
- Secara umum, matriks persegi berordo n x n.
- Contoh dari matriks persegi seperti berikut :

$$R_{2x2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad S_{3x3} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Matriks Diagonal

- Matriks diagonal ini berasal dari matriks persegi. Matriks persegi disebut sebagai matriks diagonal apabila elemen-elemen (unsur) selain elemen diagonal utamanya ialah nol.
- Contoh matriks diagonal:

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

3. Matriks Identitas

- Matriks identitas merupakan matriks diagonal yang dimana seluruh elemen pada diagonal utamanya adalah 1.
- Matriks identitas pada umumnya dinotasikan dengan I.
- Contoh matriks indentitas seperti berikut :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. MATRIKS ATAS/ BAWAH

A = (a_{ij}) dikatakan matriks segitiga atas jika A adalah matriks bujur sangkar, dengan a_{ij} = 0 untuk setiap i > j

Contoh : $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

B = (a_{ij}) dikatakan matriks segitiga bawah jika B adalah matriks bujur sangkar, dengan b_{ij} = 0 untuk setiap i < j

Contoh : $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

5. Matriks Transpose

- Jika baris dan kolom suatu matriks dipertukarkan.
  - Baris pertama menjadi kolom pertama
  - Baris kedua menjadi kolom kedua
  - Baris ketiga menjadi kolom ketiga, dan seterusnya

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

6. Matriks Simetri

- A adalah matriks simetri jika $A^t = A$

Contoh : $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

7. Matriks zero/ one

- Matriks zero/one adalah matriks yang mempunyai entri matriks hanya 0 dan 1.

Contoh : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. Matriks Invers

- Bila A dan B matriks bujur sangkar dengan AB = BA= I,
- Maka B disebut invers dari A, ditulis $B = A^{-1}$,
- Matriks A juga invers dari B, ditulis $A = B^{-1}$

OPERASI MATRIKS

Operasi yang biasa dilakukan terhadap matriks adalah :

- Operasi penjumlahan 2 buah matriks
- Operasi pengurangan 2 buah matriks
- Operasi perkalian matriks dengan scalar
- Operasi perkalian 2 buah matriks

Penjumlahan 2 buah matriks

Operasi matriks yang pertama adalah operasi penjumlahan, operasi ini dapat dilakukan pada dua buah matriks yang memiliki ukuran yang sama (ordo sama). Aturan penjumlahan matriks yaitu dengan menjumlahkan elemen-elemen yang bersesuaian pada kedua matriks.

Contoh :

$$\underset{3x3}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \\ 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}} + \underset{3x3}{\begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 7 & -3 & 9 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{3x3}{\begin{bmatrix} 6 & 8 & 11 \\ 7 & 2 & 7 \\ 10 & 9 & 9 \end{bmatrix}}$$

Pengurangan 2 buah matriks

Operasi pengurangan matriks dapat dilakukan pada dua buan matriks yang memiliki ukuran yang sama (ordo sama). Aturan pengurangan matriks yaitu dengan mengurangkan elemen-elemen yang bersesuaian pada kedua matriks.

Contoh :

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Perkalian 2 buah matriks

Syarat dari perkalian ini adalah ukuran matriks harus ***a x b*** dikali ***b x c***

Contoh :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ x } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Perkalian matriks dengan skalar

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 5 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ dan k (skalar)} = 3$$

$$3A = \begin{bmatrix} 3x2 & 3x1 & 3x0 \\ 3x3 & 3x7 & 3x5 \\ 3x(-2) & 3x0 & 3x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 9 & 21 & 15 \\ -6 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$