PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN

Dosen : Johansen Cruyff Mandey St, M.Ars

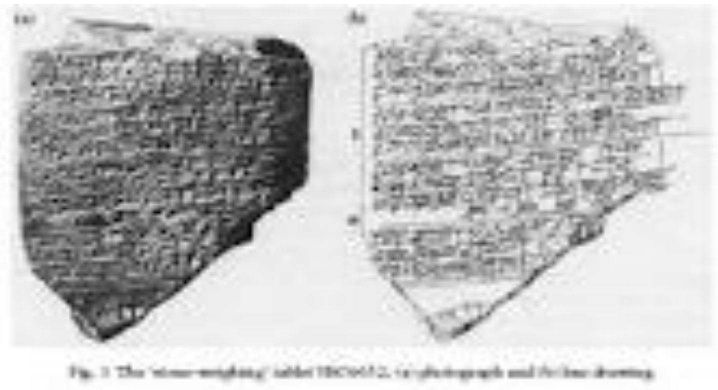
A. Sejarah Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear

Dalam kehidupan sehari-hari sering kita dihadapkan pada suatu masalah perhitungan yang melibatkan beberapa variable. Sebagai contoh, berapa harga minyak /liter jika yang diketahui adalah harga /tong, atau berapa jumlah bahan bakar yang diperlukan untuk menempuh jarak tertentu, dsb. Permasalahan tersebut dapat diselesaikan dengan grafik atau dengan sistem persamaan linear. Namun, akan lebih efisien jika menggunakan sistem persamaan linear.

Penyelesaian masalah perhitungan menggunakan sistem persamaan linear, sebenarnya bukan sesuatu yang baru. Sistem persamaan linear bahkan sudah digunakan sejak 4000 tahun yang lalu (sekitar 2000SM) pada masa Babylonian (Babel).

Hal ini bisa kita lihat dalam tabel YBC 4652 yang menjelaskan bagaimana Babel menyelesaikan suatu masalah dengan persamaan linear.

Dalam tablet YBC 4652 dituliskan:



na₄ Ì-pà ki-lá nu-na-tag 8-bi Ì-lá 3 gÍn bÍ-dah-ma
igi-3-gál igi-1 3-gál a-rà 21 e-tab bi-dah-ma
i-lá 1 ma-na sag na₄ en-nam sag na₄ $4\frac{1}{2}$ ***gin***

Yang artinya antara lain:
Saya menemukan sebuah batu, (tetapi) tidak menimbang, (setelah) saya menimbang (dari) 8 kali beratnya, ditambah 3 gin, sepertiga dari sepertiga belas dikalikan dengan 21, kemudian (itu) ditambahkan, lalu saya menimbang(nya): 1 ma-na [= 60 gin]. Berapa (berat sesungguhnya) dari batu? Berat asli dari batu itu adalah 4 ½ gin.

Masalah ini dapat diterjemahkan ke dalam persamaan modern, misal berat batu=x, maka:

$8x + 3 + 7/13\ (8x + 3) = 60$

$8x + 3 + 56/13x + 21/13 = 60$

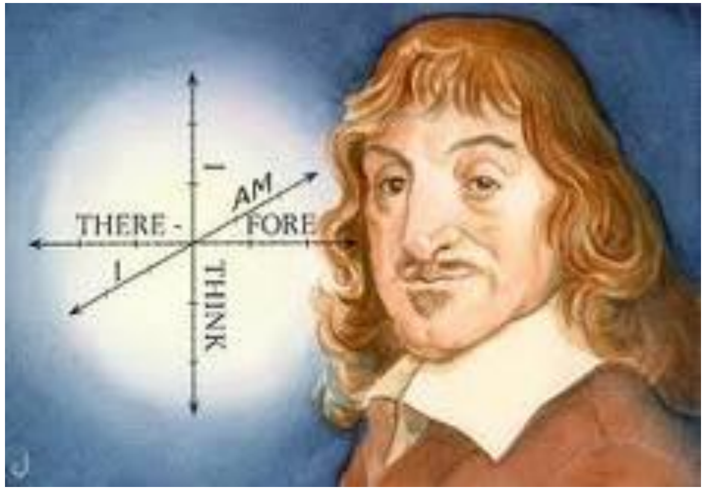
$104x + 39 + 56x + 21 = 780$

$160x = 720$

$X = 4{,}5$

Jadi, berat batu = 4,5 gin

Meskipun tablet tidak berisi prosedur penulis (tablet) dalam memecahkan masalah, ternyata terdapat jawaban yang benar dari 4½. Namun, berdasarkan apa yang kita tahu tentang metode khas Babel untuk memecahkan persamaan linear seperti itu, kita dapat berasumsi dengan keyakinan bahwa ahli kitab mungkin menggunakan metode dengan posisi yang salah (Tom Zara dalam Katz,2004).



Kita melihat bahwa kompleks sistem persamaan linear disusun dan dipecahkan, dan Babel menyusun secara sistematis masalah karakter kuadrat dan tentu juga untuk memecahkannya. Semua itu dengan teknik komputasi yang seluruhnya setara dengan kita. Jika ini adalah situasi yang sudah ada di waktu Old Babel, selanjutnya pengembangan nantinya harus melihat dengan pandangan berbeda.

Meskipun babel sudah menggunakan Sistem Persamaan Linear dalam kehidupan sehari-hari mereka, namun istilah "Sistem Persamaan Linear (*Linear Equation*)" sendiri baru muncul sekitar abad ke-17 oleh seorang matematikawan Prancis bernama Rose Descartes. Rene Descartes dilahirkan pada tahun 1596, tanggal 31 Maret di sebuah desa di Prancis. Dia menempuh pendidikan di Belanda dan belajar matematika di waktu luang, karya Descartes yang paling menghargai adalah pengembangannya geometri Cartesian yang menggunakan aljabar untuk menggambarkan geometri. Kemungkinan, Descartes menemukan istilah untuk "Sistem Persamaan Linear (*Linear Equation*)" ketika dia belajar di Belanda.

Meskipun penggunaan masalah tablet yang dapat diterjemahkan ke dalam persamaan kuadrat tidak ditemukan sampai abad kedua puluh, tablet berisi masalah persamaan kuadrat benar-benar melebihi yang mengandung masalah linear (Tom Zara Katz, 2004). Bahkan mulai dari awal 2000SM, Babel mampu memecahkan sistem persamaan dalam bentuk

$$x + y = p$$
$$xy = q$$

Jika kita menyelesaikan persamaan kedua untuk y (yang menghasilkan persamaan y = q / x), pengganti nilai ini (q / x) untuk y dalam persamaan pertama (yang memberi kami x + (q / x) = p), dan kemudian kalikan semua istilah dalam persamaan ini direvisi oleh x, kita mendapatkan yang setara kuadrat persamaan.

x2 + q = px

Dalam *Introduction to the Analysis of Algebraic Curves of 1750*, diterbitkan aturan namanya untuk solusi dari suatu *n* x sistem *n*,tapi ia tidak memberikan bukti. Ia dibawa untuk belajar sistem persaman linear ketika mencoba untuk memecahkan masalah geometri, determinan kurva aljabar *n* derajat melewati (1/2) *n* 22 + (3/2) *n* titik tetap. Itu yang pertama untuk mengamati bahwa sistem persamaan *n* di *n* tidak diketahui dan tidak selalu memiliki solusi yang unik, untuk mendapatkan keunikan itu diperlukan untuk menambahkan kondisi.

Pada abad kedelapan belas tidak ada studi tentang persamaan linear tentang determinan, sehingga tidak ada pertimbangan diberikan untuk sistem di mana jumlah persamaan berbeda dari jumlah tidak diketahui. Sehubungan dengan penemuan tentang metode kuadrat terkecil (diterbitkan dalam *a paper in 1811 dealing with the determination of the orbit of an asteroid*). *Gauss paper* pada tahun 1811 berkaitan dengan penentuan orbit asteroid, memperkenalkan prosedur yang sistematis, dan sekarang disebut *eliminasi Gaus* untuk solusi sistem persamaan linear.

Metode eliminasi Gauss muncul di Bab Delapan, *Rectangular Array*, dari matematika teks *Jiuzhang* Cina *Suanshu* penting atau ***Sembilan Bab di Seni Matematika***. Penggunaannya diilustrasikan dalam masalah delapan belas, dengan 2-5 persamaan. Referensi pertama buku dengan judul ini adalah tanggal untuk 179 CE, tapi bagian itu ditulis pada awal sekitar 150 SM. Hal ini dikomentari oleh **Liu Hui** di abad ke-3. Metode di Eropa berasal dari catatan Isaac Newton. Pada 1670, ia menulis bahwa semua buku aljabar yang diketahui olehnya kekurangan pelajaran untuk memecahkan persamaan simultan, yang Newton kemudian disediakan

Universitas Cambridge akhirnya diterbitkan catatan sebagai *Arithmetica Universalis* tahun 1707 lama setelah Newton meninggalkan kehidupan akademik. Catatan itu secara luas ditiru, yang membuat (apa yang sekarang disebut) eliminasi Gauss pelajaran standar dalam buku teks aljabar pada akhir abad ke-18. Carl Friedrich Gauss pada tahun 1810 menyusun notasi untuk eliminasi simetrik yang diadopsi pada abad ke-19 oleh komputer tangan profesional untuk memecahkan persamaan normal masalah kuadrat-terkecil. Algoritma yang diajarkan di sekolah tinggi bernama untuk Gauss hanya pada 1950-an sebagai akibat dari kebingungan sejarah subjek.

Metode eliminasi Gauss kurang efisien untuk menyelesaikan sebuah SPL, namun pada perkembangannya metode ini disempurnakan menjadi eliminasi Gauss-Jordan.

Metode tersebut dinamai Eliminasi Gauss-Jordan untuk menghormati Carl Friedrich Gauss dan Whilhelm Jordan.

Whilhelm Jordan (1842-1899) adalah seorang insinyur Jerman yang ahli dalam bidang geodesi. Sumbangannya untuk penyelesaian sistem linear dalam buku populernya, *Handbuch de Vermessungskunde* (Buku panduan Geodesi) pada tahun 1988.

B. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel (PLSV)

a. Persamaan Linear Satu Variabel (PLSV)

Persamaan linear adalah persamaan yang mengandung variabel berpangkat satu. Persamaan ini disebut juga dengan persamaan berderajat satu (persamaan linear satu variabel).

Sesuai dengan namanya yaitu “persamaan linear satu variabel” atau biasa disingkat menjadi PLSV, persamaan disini diidentikkan dengan tanda “=” (sama dengan) dan mengandung 1 (satu) variabel. Pada dasarnya, persamaan linear satu variabel merupakan suatu persamaan berbentuk kalimat terbuka yang dihubungkan dengan tanda “=” (sama dengan) dan hanya mengandung atau memiliki 1 variabel.

Karena konsep dasarnya kalimat terbuka merupakan kalimat yang belum dapat diketahui kebenarannya, bisa jadi benar, bisa jadi salah.

Contohnya, $x + 4 = 9$, jika $x = 5$ maka, kalimat tersebut bernilai benar, karena benar bahwa $5 + 4 = 9$, tapi jika $x = 1$, maka kalimat tersebut bernilai salah, karena $1 + 4 = 5$, bukan 9.

b. Pertidaksamaan Linear Satu Variabel (PTLSV)

Pertidaksamaan linier dengan satu variabel adalah suatu kalimat terbuka yang hanya memuat satu variabel dengan derajat satu, yang dihubungkan oleh lambang $<$, $>$, $\geq$, dan $\leq$. Variabelnya hanya satu yaitu y dan berderajat satu. Pertidaksamaan yang demikian disebut pertidaksamaan linier dengan satu variabel (peubah)

Kalau kalian udah paham sama persamaan linear satu variabel yang dijelaskan diatas, percaya deh kalian akan lebih mudah memahami pertidaksamaan linear satu variabel kalo kalian udah menguasai mengenai PLSV terlebih dahulu. kenapa ? karena artinya kalian udah paham sama konsep dasarnya.

Yang membedakan pertidaksamaan linear satu variabel dengan persamaan linear satu variabel yang paling mendasar adalah kalo di PLSV itu identik dengan sama dengan, di PTLSV kita tidak menggunakan tanda “=” (sama dengan) lagi, melainkan menggunakan

Tanda baca atau arti:

$>$ → ***Lebih besar dari***

$<$ → ***kurang dari***

$\geq$ → ***Lebih besar sama dengan***

$\leq$ → ***kurang dari sama dengan***

Arti dan makna dari tanda-tandal diatas, bahwa yang membedakan $>$ dengan adalah jika ada persamaan $x > 5$, maka jika x adalah angka yang lebih besar dari 5, tidak termasuk 5 itu sendiri, namun, jika x 5 maka, nilai x adalah angka yang lebih besar dari 5, termasuk 5 itu sendiri.

Contoh

1. $2x - 6 > 0$

$$2x - 6 > 0$$

$$2x - 6 + 6 > 0 + 6$$

$$2x > 6$$

$$2x \cdot \frac{1}{2} > 6 \cdot \frac{1}{2}$$

$$x > 3$$

maka nilai x lebih besar dari 3, (x = 4, 5, 6,…)

2. $-2x - 6 < 0$

$$-2x - 6 < 0$$

$$2x - 6 + 6 < 0 + 6$$

$$2x < 6$$

$$-2x \cdot -\frac{1}{2} < 6 \cdot -\frac{1}{2}$$

$$x > 3$$

Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa sifat dari ketidaksamaan linear satu variabel ketika dikali atau dibagi bilangan bulat bersifat minus (-), tanda di akhir akan berubah sebaliknya. percaya

Sistem persamaan linear disebut sistem persamaan linear satu variabel karena dalam sistem tersebut mempunyai satu variabel. Pertidaksamaan linear merupakan kalimat terbuka dalam matematika yang terdiri dari variabel berderajat satu dan dihubungkan dengan tanda pertidaksamaan.

C. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Pengertian Persamaan Linear Dua Variabel

Persamaan linear dua variabel adalah sebuah bentuk relasi sama dengan pada bentuk aljabar yang memiliki dua variabel dan keduanya berpangkat satu. Dikatakan persamaan linear karena pada bentuk persamaan ini jika digambarkan dalam bentuk grafik, maka akan terbentuk sebuah grafik garis lurus (linear).

Bentuk umum Sistem Persamaan Linear Dua Variabel:

- $\boldsymbol{ax + by = c}$
- $\boldsymbol{px + qy = r}$

Dimana:

- $\boldsymbol{a, b, p, q}$ disebut koefisien
- $\boldsymbol{x, y}$ disebut variabel
- $\boldsymbol{c, r}$ disebut konstanta

Himpunan Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

1) *Metode Grafik*

Ketika menggunakan metode grafik, kalian harus menggambar masing-masing persamaan linear dua variabel tersebut dalam koordinat kartesius. Himpunan penyelesaiannya adalah titik ptong dari kedua garis. Jika garisnya tidak berpotongan atau sejajar maka himpunan penyelesaiannya adalah himpunan kosong. Namun demikian, jika garisnya berhimpit maka jumlah himpunan penyelesaiannya tak terhingga.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan

$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$ dengan menggunakan metode grafik! (x dan y himpunan bilangan real).

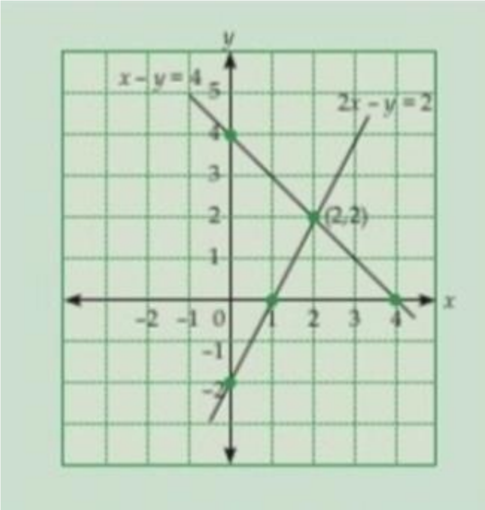
Penyelesaian:

x	0	1
y	−2	0

$2x – y = 2$

x	0	4
y	4	0

$x – y = 4$



Titik potong kedua garis adalah (2,2). Jadi himpunan penyelesaian dari sistem persamaan tersebut adalah (2,2).

2) ***Metode Substitusi***

Langkah-langkah pengerjaan dengan menggunakan metode substitusi untuk mencari himpunan penyelesaian dari SPLDV sebagai berikut.

* Ubalah salah satu persamaan ke dalam bentuk $x = \ldots$ atau $y = \ldots$

* Masukkan (substitusi) nilai x atau y yang diperoleh ke dalam persamaan yang kedua.

* Nilai x atau y yang diperoleh kemudian disubstitusikan ke dalam salah satu persamaan untuk memperoleh nilai variabel lainnya yang belum diketahui (x atau y).

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan

$\begin{cases} 2x + y = 4; x, y \in R \\ -x + 2y = 7; x, y \in R \end{cases}$ menggunakan metode substitusi!

Penyelesaian:

Langkah 1 (mengubah ke dalam bentuk $x =\ldots$ atau $y =\ldots$)

$2x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - 2x$

Langkah 2 (substitusi $y = 4 - 2x$ ke persamaan $-x + 2y = -7$)

$$
\begin{aligned}
-x + 2y = -7 &\Leftrightarrow -x + 2(4 - 2x) = -7 \\
&\Leftrightarrow -x + 8 - 4x = -7 \\
&\Leftrightarrow -x - 4x = -7 - 8 \\
&\Leftrightarrow -5x = -15 \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-15}{-15} \\
&\quad x = 3
\end{aligned}
$$

Langkah 3 (substitusi $x = 3$ ke $2x + y = 4$ atau $-x + 2y = -7$)

$$
\begin{aligned}
2x + y = 4 \quad &\Leftrightarrow 2(3) + y = 4 \\
&\Leftrightarrow 6 + y = 4 \\
&\Leftrightarrow y = 4 - 6 = -2
\end{aligned}
$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari sistem persamaan

$\begin{cases} 2x + y = 4; x, y \in R \\ -x + 2y = 7; x, y \in R \end{cases}$ adalah $\{(3,2)\}$.

3) ***Metode Eliminasi***

Penyelesaian SPLDV dengan metode eliminasi pada dasarnya adalah menghilangkan (mengeliminasi) salah satu variabel dari sistem persamaan yang akan dicari himpunan penyelesaiannya. Caranya dengan menjumlah atau mengurangkan kedua sistem persamaan.

Untuk menentukan variabel y maka hilangkan terlebih dahulu variabel x. Begitu pula sebaliknya. Sebagai catatan, untuk menghilangkan variabel x atau y maka koefisien dari masing-masing variabel dalam sistem persamaan haruslah sama. Jika salah satunya tidak sama maka harus di samakan dahulu. Caranya mengalikan dengan bilangan bulat tertentu sehingga koefisiennya menjadi sama.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan

$\begin{cases} 2x - y = -2; x, y \in R \\ x + 2y = 4; x, y \in R \end{cases}$ dengan menggunakan metode eliminasi!

Penyelesaian:

* Mengeliminasi variabel x (untuk mencari y)

$$\begin{array}{r|c|r} 2x - y = -2 & \times 1 & 2x - y = -2 \\ x + 2y = 4 & \times 2 & 2x + 4y = 8 \end{array}$$

$$-5y = -10, \text{ maka } y = \frac{-10}{-5} = 2$$

* Mengeliminasi variabel y (untuk mencari x)

$$\begin{array}{r|c|r} 2x - y = -2 & \times 2 & 4x - 2y = -4 \\ x + 2y = 4 & \times 1 & x + 2y = 4 \end{array}$$

$$5x = 0$$

$$x = 0$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari sistem persamaan tersebut adalah $\{(0,2)\}$.

4) ***Metode Campuran (Eliminasi dan Substitusi)***

Dalam pengerjaan soal persamaan linear dua variabel, terkadang kita menemukan kesulitan jika menggunakan metode eliminasi untuk menentukan himpunan penyelesaiannya. Oleh karena itu, kita dapat menggunakan metode campuran, yaitu menentukan salah satu variabel x atau y dengan menggunakan metode eliminasi. Hasil yang diperoleh dari x atau y kemudian disubstitusikan ke salah satu persamaan linear dua variabel tersebut.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian dari sistem persamaan

$\begin{cases} x + 2y = 7; x, y \in R \\ 2x + 3y = 10; x, y \in R \end{cases}$ menggunakan metode campuran!

Penyelesaian:

* Mengeliminasi variabel x (untuk mencari y)

$$\begin{array}{r|c|r} x + 2y = 7 & \times 2 & 2x + 4y = 14 \\ 2x + 3y = 10 & \times 1 & 2x + 3y = 10 \end{array}$$

$$y = 4$$

* Substitusi $y = 4$ ke persamaan $2x + 3y = 10$

$$\begin{aligned} 2x + 3y = 10 &\Leftrightarrow 2x + 3(4) = 10 \\ &\Leftrightarrow 2x + 12 = 10 \\ &\Leftrightarrow 2x = -2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = -1 \end{aligned}$$

Jadi, himpunan penyelesaian dari sistem persamaan tersebut adalah {(-1,4)}.

Pengertian Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Pertidaksamaan linear dua variabel memuat dua variabel berpangkat satu yang memuat tanda ketidaksamaan. Tanda ketidaksamaan ini diantaranya ialah kurang dari ($<$), lebih dari ($>$), kurang dari sama dengan ($\leq$) dan lebih dari sama dengan ($\geq$).

Bentuk umum pertidaksamaan linear dua variabel:

$\boldsymbol{ax + by > c}$

$\boldsymbol{ax + by < c}$

$\boldsymbol{ax + by \geq c}$

$\boldsymbol{ax + by \leq c}$

Dimana:

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ disebut koefisien

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ disebut variabel

$\boldsymbol{c}$ disebut konstanta

$>, <, \geq, \leq$ disebut tanda pertidaksamaan

Himpunan Penyelesaian Pertidaksamaan Linear Dua Variabel

Contoh:

Pak Rendi berencana membangun 2 tipe rumah; yaitu, tipe *A* dan tipe *B* di atas sebidang tanah seluas 10.000 m2. Setelah dia berkonsultasi dengan arsitek (perancang bangunan), ternyata untuk membangun sebuah rumah tipe *A* dibutuhkan tanah seluas 100 m2 dan untuk membangun sebuah rumah tipe *B* dibutuhkan tanah seluas 75 m2. Karena dana yang dimilikinya terbatas, maka banyak rumah yang direncanakan akan dibangun paling banyak 125 unit. Jika kamu adalah arsitek Pak Rendi,

1) Bantulah Pak Rendi menentukan berapa banyak rumah tipe *A* dan tipe *B* yang mungkin dapat dibangun sesuai dengan kondisi luas tanah yang ada dan jumlah rumah yang akan dibangun.

2) Gambarkanlah daerah penyelesaian pada bidang kartesius berdasarkan batasan-batasan yang telah diuraikan.

Misalkan: x: banyak rumah tipe *A* yang akan dibangun

y: banyak rumah tipe *B* yang akan dibangun

1) Banyak rumah tipe *A* dan tipe *B* yang akan dibangun

a) Luas tanah yang diperlukan untuk membangun rumah tipe *A* dan tipe *B* di atas tanah seluas 10.000 m2 ditentukan oleh pertidaksamaan:

$100x + 75y \leq 10.1000$, pertidaksamaan ini disederhanakan menjadi:

$\boldsymbol{4x + 3y \leq 400}$ **…………………………………………………………………….(1)**

b) Jumlah rumah yang akan dibangun

$\boldsymbol{x + y \leq 125}$ **…………………………………………………………………......(2)**

Dari pertidaksamaan (1) dan (2), kita tentukan banyak rumah tipe *A* dan tipe *B* yang akan dibangun dengan menerapkan metode eliminasi pada sistem persamaan linear dua variabel berikut.

$$\begin{array}{r|l} 4x + 3y = 400 & \times 1 \rightarrow 4x + 3y = 400 \\ x + y = 125 & \times 3 \rightarrow 3x + 3y = 375 \end{array}$$

$$x = 25$$

Untuk $x = 25$ maka $y = 125 - x$

$$y = 125 - 25$$

$$= 100$$

Dengan demikian, Pak Rendi dapat membangun rumah tipe A sebanyak 25 unit, dan rumah tipe B sebanyak 100 unit.

Untuk menggambar daerah penyelesaian pada diagram kartesius dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

- ***Langkah 1***

Menggambar garis dengan persamaan $4x + 3y = 400$ dan garis $x + y = 125$. Agar kita mudah menggambar garis ini, terlebih dahulu kita cari titik potong dengan sumbu x yang terjadi jika $y = 0$ dan titik potong dengan sumbu y yang terjadi jika $x = 0$.

Untuk garis $4x + 3y = 400$, jika $y = 0$, maka $x = 100$.

Jika $x = 0$, maka $y = 133{,}3$.

Maka garis $4x + 3y = 400$ memotong sumbu y di titik (0,133,3) dan memotong sumbu y di titik (100,0).

Untuk garis $x + y = 125$, jika $y = 0$ maka $x = 125$

jika $x = 0$ maka $y = 125$

Maka garis $x + y = 125$ memotong sumbu y di titik (0,125) dan memotong sumbu x di titik (125,0).

Langkah 2

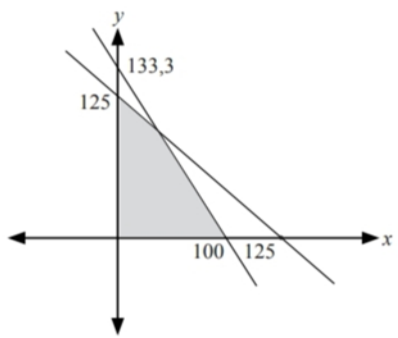
Menentukan daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$ dan $x + y \leq 125$. Daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Jika garis $4x + 3y = 400$ digambar pada diagram kartesius maka garis tersebut akan membagi dua daerah, yaitu daerah $4x + 3y < 400$ dan daerah $4x + 3y > 400$.

Selanjutnya menyelidiki daerah mana yang menjadi daerah penyelesaian dari pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$, dengan cara mengambil sembarang titik misal $P(xy)$ pada salah satu daerah, kemudian mensubstitusikan titik tersebut ke pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Jika pertidaksamaan tersebut bernilai benar maka daerah yang memuat titik $P(xy)$ merupakan daerah penyelesainnya, jika bernilai salah maka daerah tersebut bukan daerah penyelesaian pertidaksamaan $4x + 3y \leq 400$. Dengan cara yang sama maka daerah penyelesaian pertidaksamaan $x + y \leq 125$ juga dapat diketahui.

Langkah 3

Mengarsir daerah yang merupakan daerah penyelesaian masing-masing pertidaksamaan. Daerah yang diarsir dua kali merupakan daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan linear.

Setelah langkah 1, 2, dan 3 di atas dilakukan, maka daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan digambarkan sebagai berikut.



D. Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV)

Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel atau disingkat dengan SPLTV memiliki pengertian sebagai bentuk perluasan dari sistem persamaan linear dua variabel
(SPLDV). Bedanya, persamaan linear tiga variabel terdiri dari tiga persamaan yang masing-masing persamaan memiliki tiga variabel (misal x, y dan z)

Bentuk Umum Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Bentuk umum dari Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV) ialah:

A1x+b1y+c1z=d1
A2x+b2y+c2z=d2
A3x+b3y+c3z=d3

Dengan: a1,b1,c1,d1,a2,b2,c2,d2,a3,b3,c3,d3 bilangan real

Keterangan:
a1,a2,a3 adalah koefisien dari x
b1,b2,b3 adalah koefisien dari y
c1,c2,c3 adalah koefisien dari z
d1,d2,d3 adalah konstanta
x,y,z adalah variabel(peubah)

Ciri Ciri Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Berikut ini merupakan ciri – ciri dari Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV):

- Menggunakan relasi tanda sama dengan (=)
- Memiliki tiga variabel
- Ketiga variabel tersebut memiliki derajat satu (berpangkat satu)

Komponen Pembentuk Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel(SPLTV) :

Variabel adalah notasi pengganti suatu bilangan yang belum diketahui nilainya secara jelas. Variabel disebut juga sebagai peubah. Variabel biasanya dinotasikan dengan huruf kecil, seperti a, b, c, …, z.

Contoh: Suatu bilangan jika dikalikan 3 kemudian dikurangi 9 menghasilkan 6. Maka bentuk persamaannya adalah $3x – 9 = 6$ dimana x merupakan variabel dari persamaan tersebut.

Konstanta adalah suku dari suatu bentuk aljabar yang berupa bilangandan tidak memuat variabel.

Contoh: Konstanta dari bentuk aljabar $5x + 7$ adalah 7.

Koefisien pada bentuk aljabar adalah faktor konstanta dari suatu suku pada bentuk aljabar.

Contoh: Koefisien x dari $9x – 3$ adalah 9.

Suku adalah sebuah variabel beserta koefisiennya atau konstanta pada bentuk aljabar yang dipisahkan oleh operasi jumlah atau selisih.

Contoh:1. Suku satu adalah bentuk aljabar yang tidak dihubungkan oleh operasi jumlah atau selisih.

Contoh : 5,3x, - 2xy. 2. Suku dua adalah bentuk aljabar yang dihubungkan oleh satu operasi jumlah atau selisih. Contoh: $x + y$, $2x – 3$. 3.Suku tiga adalah bentuk aljabar yang dihubungkan oleh dua operasi jumlah atau selisih. Contoh : $4x^2 + 5x – 3$, $2xy – x + y$.

Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Himpunan penyelesaian dari sebuah Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel (SPLTV) dapat dicari dengan menggunakan beberapa metode, diantaranya:

Metode Eleminasi

SPLTV dengan metode eliminasi dilakukan dengan cara menghilangkan salah satu variabel pada dua buah persamaan. Metode ini dilakukan sampai tersisa satu buah variabel. Metode eliminasi dapat digunakan pada semua SPLTV, tetapi membutuhkan langkah yang panjang karena setiap langkah hanya dapat menghilangkan satu variabel saja.Diperlukan minimal tiga kali metode eliminasi untuk menentukan himpunan penyelesaian dari SPLTV. Berikut ini merupakan langkah – langkah penyelesaian SPLTV menggunakan metode eliminasi:

- persamaan pada SPLTV. Jika terdapat dua persamaan yang memiliki nilai koefisien sama pada variabel yang sama, kurangkan atau jumlahkan kedua persamaan tersebut agar variabel tersebut berkoefisien 0.
- Jika tidak terdapat variabel dengan koefisien sama, kalikan kedua persamaan dengan bilangan yang membuat koefisien suatu variabel pada kedua persamaan tersebut menjadi sama. Kurangkan atau jumlahkan kedua persamaan agar variabel tersebut berkoefisien 0.
- Ulangi langkah 2 untuk pasangan persamaan lain. Variabel yang dihilangkan pada langkah ini harus sama dengan variabel yang dihilangkan pada langkah 2.
- Setelah diperoleh dua persamaan baru pada langkah sebelumnya, tentukan himpunan penyelesaian kedua persamaan menggunakan metode penyelesaian Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (SPLDV).
- Subtitusikan nilai dua variabel yang diperoleh pada langkah ke-4 pada salah satu persamaan SPLTV sehingga diperoleh nilai dari variabel ketiga.

Contoh

Tentukan himpunan penyelesaian dari SPLTV berikut ini menggunakan metode subtitusi!

$3x + 2y + z = 14$
$3x + 2y – z = 12$
$x+y+z=6$

Jawab:

Kita beri nama ketiga persamaan SPLTV di atas:

$3x + 2y + z = 14$ ....(1)
$3x + 2y – z = 12$ ....(2)
$x+y+z =6$ ....(3)

Langkah 1 (eliminasi variabel z pada persamaan (1) dan (2)):

$$\begin{array}{rl} 3x + 2y + z = 14 & \\ 3x + 2y - z = 12 & + \\ \hline 6x + 4y \quad = 26 & \end{array}$$

...... (4)

Langkah 2 (eliminasi variabel z pada persamaan (1) dan (3)):

$$\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 14 \\ x + y + z = 6 \\ \hline 2x + y = 8 \end{array} \quad - \quad ......(5)$$

Langkah 3 (eliminasi variabel y pada persamaan (4) dan (5)):

$$\begin{array}{rcl} 6x + 4y = 26\ |x1| & \Leftrightarrow & 6x + 4y = 26 \\ 2x + y = 8\ |x4| & \Leftrightarrow & 8x + 4y = 32 \quad - \\ \hline & & -2x = -6 \\ & & x = 3 \end{array}$$

Langkah 4 (eliminasi variable x pada persamaan (4) dan (5)) :

$$\begin{array}{rcl} 6x + 4y = 26\ |x1| & \Leftrightarrow & 6x + 4y = 26 \\ 2x + y = 8\ |x1| & \Leftrightarrow & 6x + 3y = 24 \quad - \\ \hline & & y = 2 \end{array}$$

Langkah 5 (subtitusi nilai x dan y ke persamaan (1) untuk memperoleh nilai z):

$$3x + 2y + z = 14$$
$$3(3) + 2(2) + z = 14$$
$$9 + 4 + z = 14$$
$$z = 1$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah **{3,2,1}**

Metode Gabungan

Penyelesaian SPLTV dengan metode gabungan dilakukan dengan cara menggabungkan metode eliminasi dan metode subtitusi. Metode ini dapat dilakukan dengan menggunakan metode eliminasi terlebih dahulu lalu menggunakan metode subtitusi, atau sebaliknya.

Contoh :

Tentukan himpunan penyelesaian dari SPLTV berikut ini menggunakan metode gabungan!

$3x + 2y + z = 14$

$3x + 2y - z = 12$

$x + y + z = 6$

Contoh

Jawab :

$3x + 2y + z = 14$ ......(1)
$3x + 2y – z = 2$ ....(2)
$x + y + z = 6$ ....(3)

Langkah 1 (eliminasi variabel z pada persamaan (1) dan (2)):

$$\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 14 \\ 3x + 2y - z = 12 \quad + \\ \hline 6x + 4y = 26 \end{array}$$
.......(4)

Langkah 2 (eliminasi variabel z pada persamaan (1 dan (3)):

$$\begin{array}{r} 3x + 2y + z = 14 \\ x + y + z = 6. \quad - \\ \hline 2x + y = 8 \end{array}$$
........(5)

Langkah 3 (mencari nilai x dengan metode subtitusi):

Persamaan (4) ekuivalen dengan persamaan $x = 26 – 4y/6$.
Substitusikan persamaan $x = 26 – 4y/6$ ke persamaan (5).

$$2x + y = 8$$

$$2\left(\frac{26-4y}{6}\right) \quad = 8$$

$$\frac{26-4y}{3} + y = 8$$

$$\frac{26-4y\ 3+y}{3} = 8$$

$$26 - y = 2$$

Langkah 4 (subtitusikan nilai y ke persamaan (5) untuk memperoleh nilai x):

$$2x + y = 8$$

$$2x + 2 = 8$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Langkah 5 (subtitusikan nilai x dan y ke persamaan (1) untk memperoleh nilai z):

$$3x + 2y + z = 14$$

$$3(3) + 2(2) + z = 14$$

$$9 + 4 + z = 14$$

$$z = 1$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah {**3,2,1**}.

E. Persamaan Dan Pertidaksamaan Nilai Mutlak

Nilai mutlak yaitu nilai suatu bilangan riil tanpa tanda plus atau minus. Dari sudut pandang geometri, nilai mutlak dari x ditulis $|x|$, adalah jarak dari x ke 0 pada garis bilangan real. Karena jarak selalu positif atau nol maka nilai mutlak x juga selalu bernilai positif atau nol untuk setiap x bilangan real.

Nilai mutlak x didefinisikan dengan

$$|\boldsymbol{x}| = \begin{cases} -\boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x} < \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{cases}$$

Atau dapat pula ditulis

$|x| = x$ jika $x \geq 0$

$|x| = -x$ jika $x < 0$

Definisi diatas dapat kita maknai sebagai berikut :

Nilai mutlak bilangan positif atau nol adalah bilangan itu sendiri dan nilai mutlak bilangan negative adalah lawan dari bilangan tersebut.

Contoh

$|7| = 7 \quad |0| = 0 \quad |-4| = -(-4) = 4$

Persamaan $\sqrt{x^2}$ = x hanya bernilai benar jika x ≥ 0. Untuk x < 0, maka $\sqrt{x^2}$ = -x.

dapat kita tulis

$$\sqrt{\boldsymbol{x^2}} = \begin{cases} -\boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x < 0} \\ \boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x \geq 0} \end{cases}$$

Bentuk diatas sama persis dengan definisi nilai mutlak x.

Pernyataan berikut benar untuk setiap x bilangan real.

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\boldsymbol{x^2}}$$

Jika kedua ruas persamaan diatas kita kuadratkan akan diperoleh

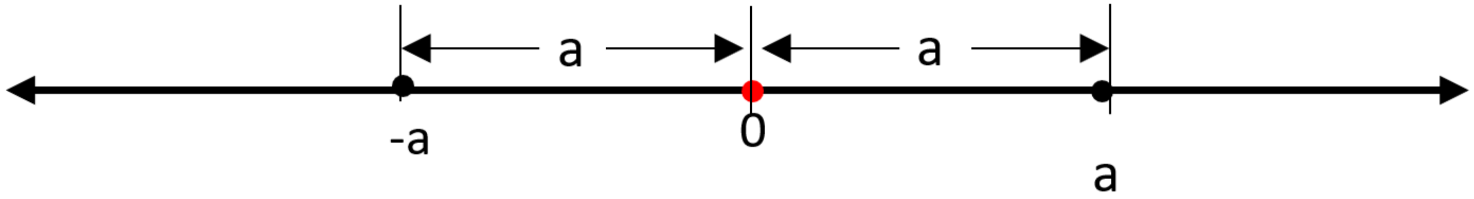
$$|x| = \boldsymbol{x^2}$$

1. Persamaan Nilai Mutlak

Persamaan nilai mutlak yaitu suatu nilai mutlak dari sebuah bilangan yang dapat didefinisikan sebagai jarak bilangan tersebut dari sebuah bilangan tersebut terhadap titik 0 pada garis bilangan tanpa memperhatikan arahnya.

$$\boldsymbol{|x| = a \; dengan \; a > 0}$$

Persamaan $|x| = a$ artinya jarak dari x ke 0 sama dengan a.



Jarak – a ke 0 sama dengan jarak a ke 0, yaitu a. Pertanyaannya adalah dimana x agar jaraknya ke 0 juga sama dengan a.

Posisi x ditunjukkan oleh titik merah pada gambar diatas, yaitu x = - a atau x = a. jelas terlihat bahwa jarak dari titik tersebut ke 0 sama dengan a. jadi, agar jarak x ke 0 sama dengan a, haruslah **x = -a** atau **x = a**.

Cara Mengerjakan Soal Persamaan Nilai Mutlak

a. Cara Langsung
b. Cara Kuadrat
c. Cara Definisi

Contoh

1. $|x - 3| = 6$

a. Cara langsung

$|x - 3| = 6$

x – 3 = 6 √ x – 3 = -6

x = 6 + 3 x = -6 + 3

x = 9 **x = -3**

b. Cara Kuadrat

$|x - 3| = 6$ → $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$(x - 3)^2 = 6^2$

$(x - 3)^2 - 6^2 = 0$

$(x - 3 + 6)(x - 3 - 6) = 0$

$(x + 3)(x - 9) = 0$

x = -3 √ **x = 9**

c. cara definisi → ≥ 0 dan < 0

$|x - 3| = 6$

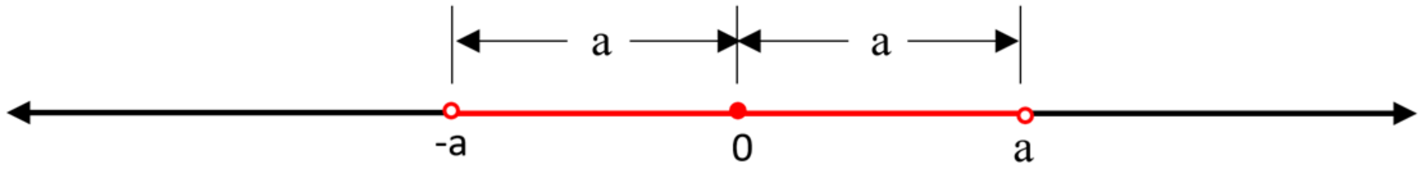
- $x - 3 \geq 0$ maka $x - 3 = 6$
  $x \geq 3$ $x = 6 + 3$
  x = 9 (M)
- $x - 3 < 0$ maka $-x + 3 = 6$
  $x < 0$ $-x = 6 - 3$
  $-x = 3$
  x = -3 (M)

2. Pertidaksamaan Nilai Mutlak

$\boldsymbol{|x| < a \text{ untuk } a > 0}$

Peridaksamaan $|x| < a,$ artinya jarak dari x ke 0 kurang dari a.

Perhatikan gambar berikut

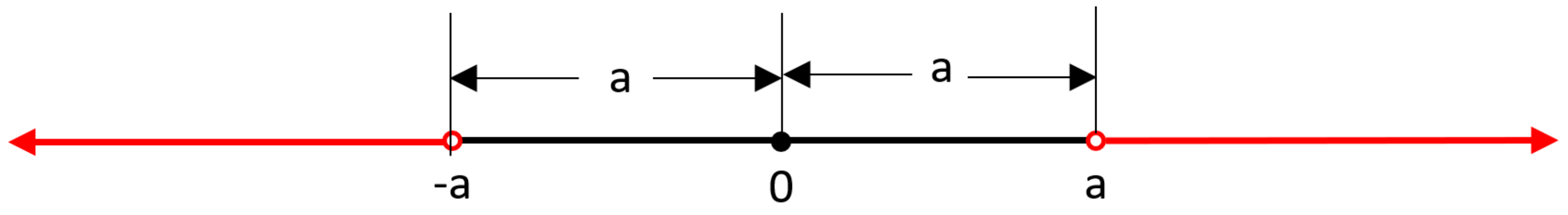


posisi x ditunjukkan oleh ruas garis berwarna merah, yaitu himpunan titik-titik diantara – a dan a yang bias akita tulis – a < x < a. jika kita ambil sebarang titik pada interval tersebut, sudah dipastikan jaraknya ke 0 kurang dari a. jadi, agar jarak x ke 0 kurang dari a, haruslah **-a < x < a**.

$|x| > untuk\ a > 0$

Pertidaksamaan $|x| > a$ artinya jarak dari x ke 0 lebih dari a.

Perhatikan gambar berikut



Posisi ditunjukkan oleh ruas garis berwarna merah yaitu x < - a atau x > a. jika kita ambil sebarang titik pada interval tersebut, sudah dipastikan jaraknya ke 0 lebih dari a. jadi, agar jarak x k enol lebih dari a, haruslah **x** < **-a** atau **x** >**a**.

Secara intuitif, uraian-uraian diatas dapat kita simpulkan sebagai berikut:

SIFAT : untuk ***a*** > ***0*** berlaku

a. $x = a \Leftrightarrow x = a$ *atau* $x = -a$

b. $x < a \Leftrightarrow -a < x < a$

c. $x = a \Leftrightarrow x < -a$ *atau* $x > a$

Note:

Apabilah kedua ruas memuat tanda mutlak, sifat a masih dapat digunakan, namun sifat b dan c sudah tidak dapat digunakan.

Sifat untuk garis bilangan:

Ada sama dengan ●

Tidak ada sama dengan ○

Contoh

1. $|ax + b| = C$ ≥ ●

< ○

ax + b ≤ -C √ ax + b ≥ C

contoh :

1. $|2x - 1| \geq 3$

2x – 1 ≤ -3 √ 2x – 1 ≥ 3

2x ≤ -2 2x ≥ 3 + 1

x ≤ -1 x ≥ 2

HP : {x | $-1 \leq x \leq 2, x \in R$}

2. $|ax - b| \leq$ C

-C ≤ $ax + b$ ≤ C

Contoh:

$|4x - 2| \leq 6$

-6 ≤ $4x - 2$ ≤ 6

-4 ≤ $4x$ ≤ 8

-1 ≤ x ≤ 2

HP : {x | $-1 \leq x \leq 2, x \in R$}

F. Aplikasi Persamaan Dan Pertidaksamaan Linear Terhadap Arsitektur

1. Menentukan Luas Bidang

Contoh :

Keliling sebuah persegi panjang sama dengan 3cm. Jika panjangnya 3 cm lebih dari lebar.Tentukan Luas persegi panjang tersebut!

Misal:

Lebar = x

anjang = x+3

P=x+3

Keliling = 2(p+l)   Panjang= x+3   Luas = p × l

30 = 2(x+3+x)   = 6+3   = 9 × 6

15 = (2x+3)   = 9   = 54 cm²

15-3 = 2x   Lebar =x = 6

12 = 2x

x = 6

Jadi Luas persegi panjang tersebut adalah 54 cm²

2. Menghitung Jumlah Bahan Yang Digunakan

Contoh :

Sebuah lantai kasar memerlukan pasir,air,dan semen.Perbandingan ke tiga bahan tersebut adalah 5:3:1.Massa totalnya adalah 400 kg.Jika pasir dan semen yang diberikan berturut-turut sebanyak 60 kg dan 40 kg tiap per ember.Berapakah jumlah massa air per ember yang diberikan?

Jumlah air yang diberikan sebanyak B kg

$$5A + 3B + C \leq 400$$
$$5(60) + 3B + 40 \leq 400$$
$$300 + 3B + 40 \leq 400$$
$$340 + 3B \leq 400$$
$$3B \leq 400-340$$
$$3B \leq 60$$
$$B = 60/3$$
$$B = 20$$

Jadi massa air per ember nya adalah 20 kg

3. Perhitungan lebar tanah

Pak Sarif memiliki sebidang tanah berbentuk persegi panjang, Lebar tanah tersebut 5 meter lebih pendek dari panjangnya. Keliling tanah pak Sarif adalah 50 meter. Berapakah ukuran panjang dan lebar tanah Pak Sarif?

Penyelesaiannya :

Diketahui : keliling tanah = 50 m

Misalkan ukuran panjang tanah = x, maka lebar tanah = x -5

Keliling tanah = keliling persegi panjang

$$50 = 2\ (p + l)$$

$$50 = 2\ (x + x - 5)$$

$$50 = 2\ (2x - 5)$$

$$50 = 4x - 10$$

$$50 + 10 = 4x$$

$$60 = 4x$$

$$60 : 4 = x$$

$$15 = x$$

Panjang tanah = x = 15 meter

Lebar tanah = x – 5 = 15 – 5 = 10 meter

Perhitungan bidang

Tiga bilangan genap berjumlah 66

Suatu bilangan genap mempunyai pola +2, misalkan bilangan genap pertama adalah x, maka bilangan genap kedua dan ketiga berturut-turut adalah x + 2, dan x + 4, sehingga:

bilangan 1 + bilangan 2 + bilangan 3 = 66

$x + (x + 2) + (x + 4) = 66$

$3x + 6 = 66$

$3x = 60$

$x = 20$

bilangan genap pertama = x = 20

detik bilangan genap = x + 2 = 20 + 2 = 22

bilangan genap ketiga = x + 4 = 20 + 4 = 24

TERIMAH KASIH