MATEMATIKA STATISTIKA ARSITEKTUR

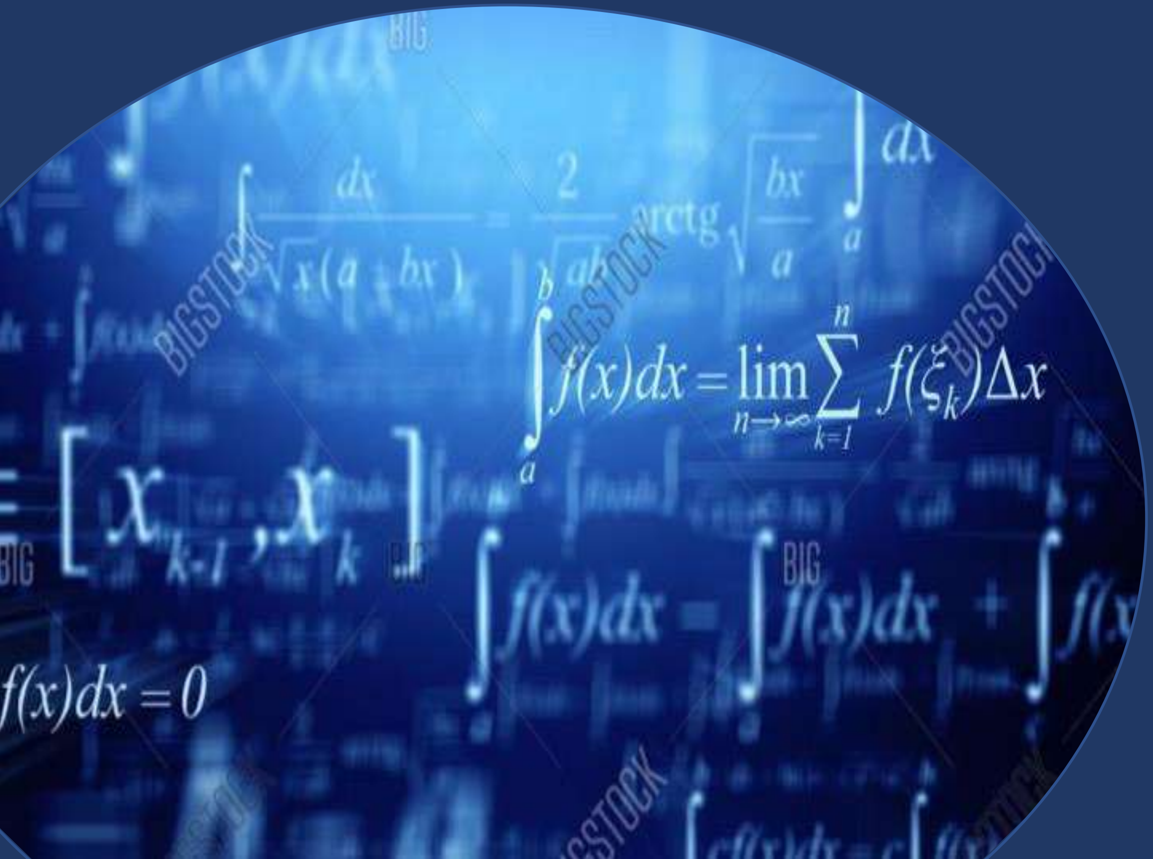
INTEGRAL KALKULUS

Dosen/Pengajar :
JOHANSEN CRUYFF MANDEY ST, M.Ars

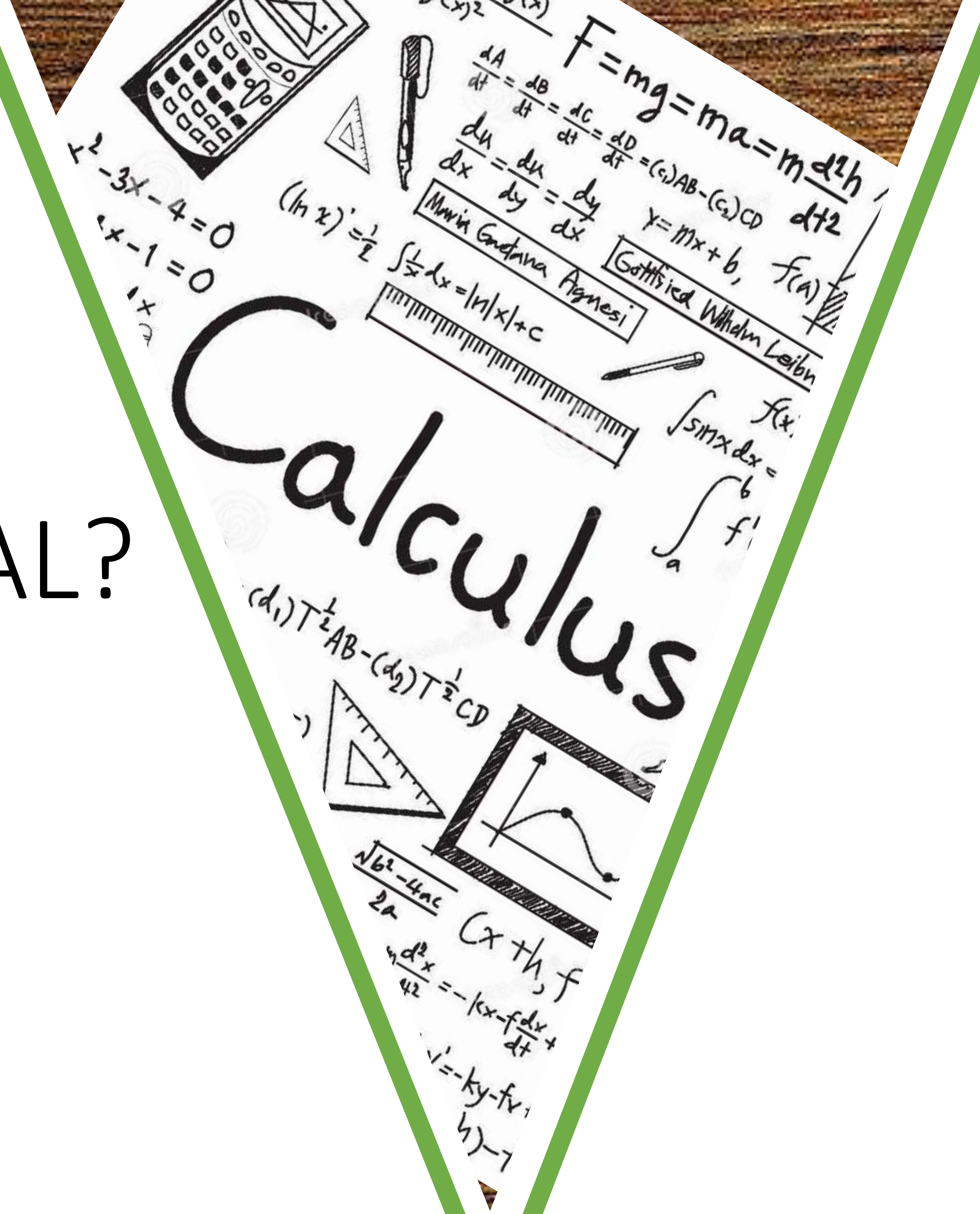
MATERI

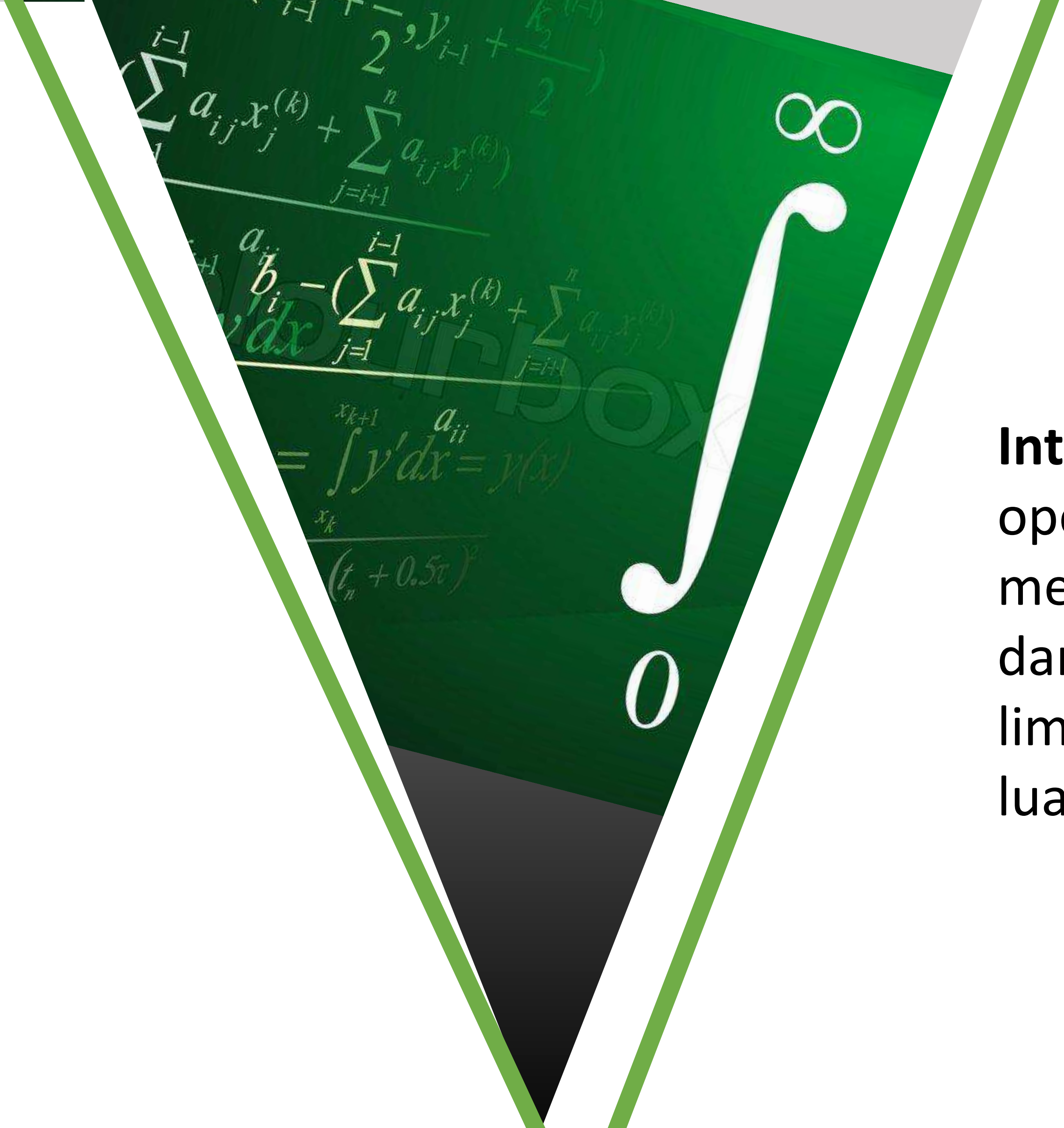
INTEGRAL KALKULUS

$\int$



APA ITU INTEGRAL?

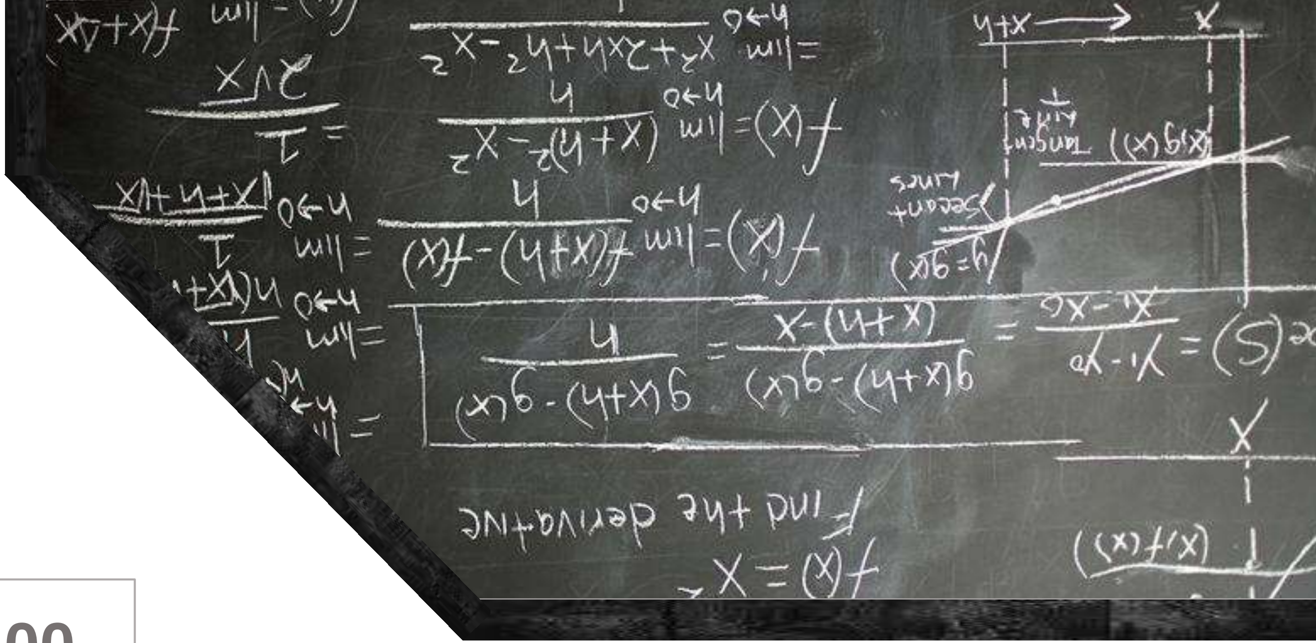




Integral merupakan bentuk operasi [matematika]() yang menjadi kebalikan (invers) dari operasi turunan dan limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu.

Ini Adalah Lambang Integral:

$$\int$$



287-212 SM

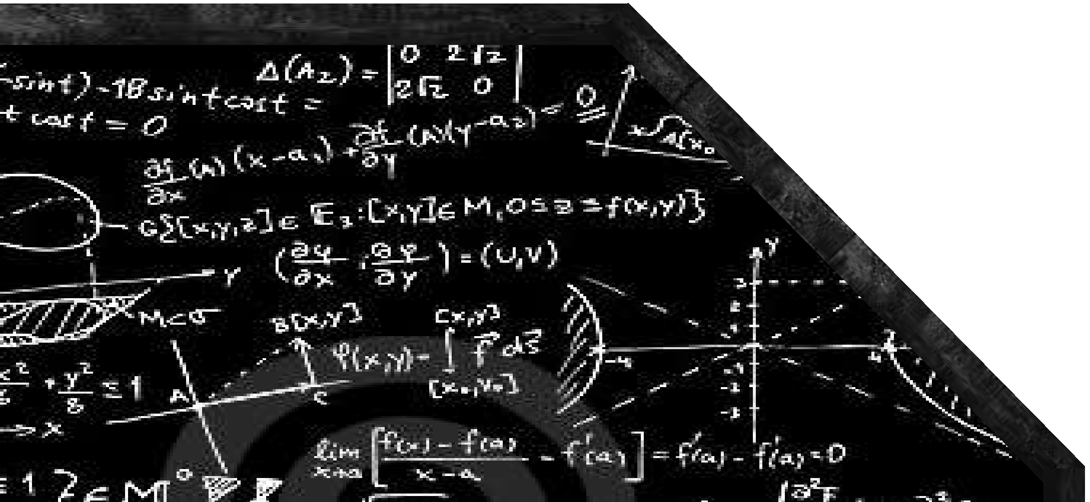
Archimedes

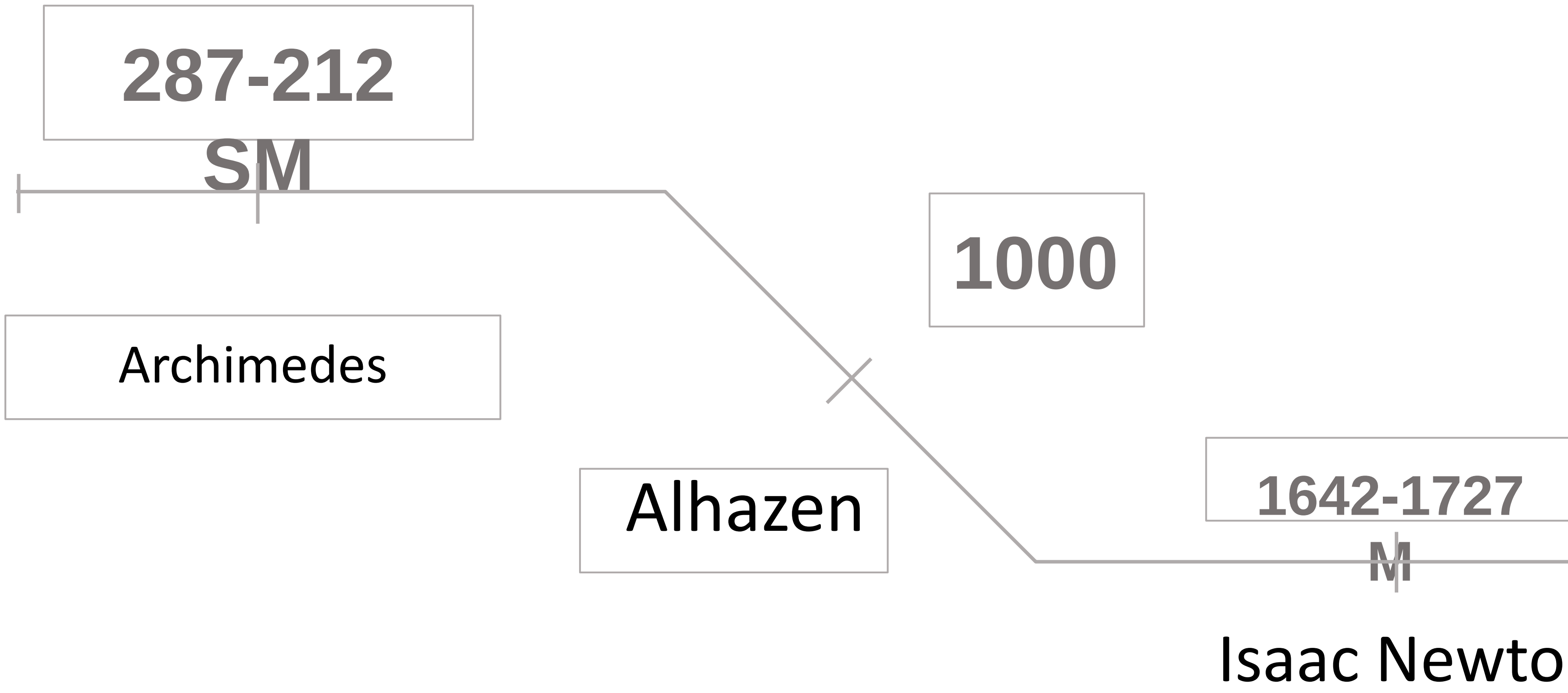
1000

Alhazen

1642-1727 M

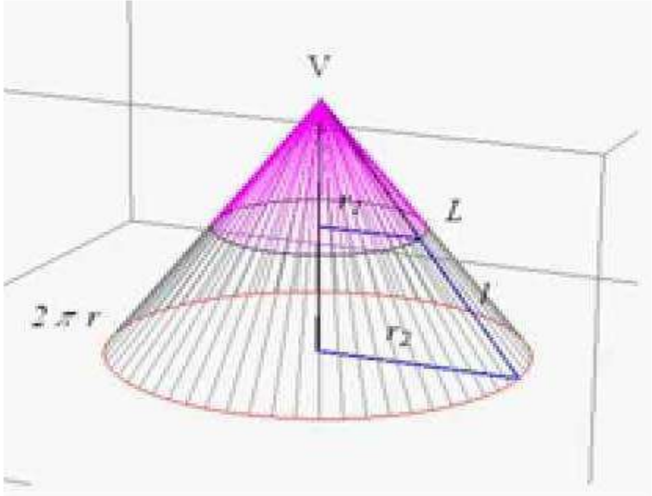
Isaac Newton




287-212
SM
Archimedes
1000
Alhazen
1642-1727
M
Isaac Newto

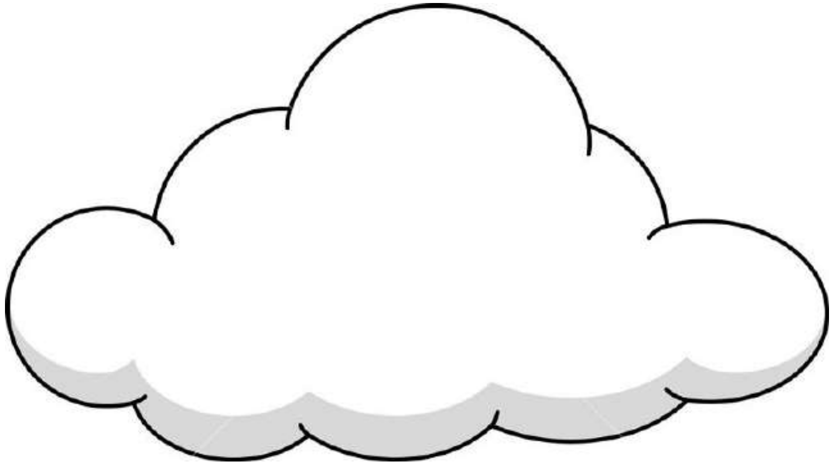
Archimedes

Archimedes (287-212 SM), seorang fisikawan sekaligus matematikawan dari Syracuse, Yunani. Pada abad kedua sebelum masehi, Archimedes talah menemukan ide penjumlahan untuk menentukan luas sebuah daerah tertutup dan volume dari benda putar. Diantaranya adalah rumus lingkaran, luas segmen parabola, volume bola, volume kerucut, serta volume benda putar yang lain. Ide penjumlahan ini merupakan salah satu konsep dasar dari Kalkulus Integral.

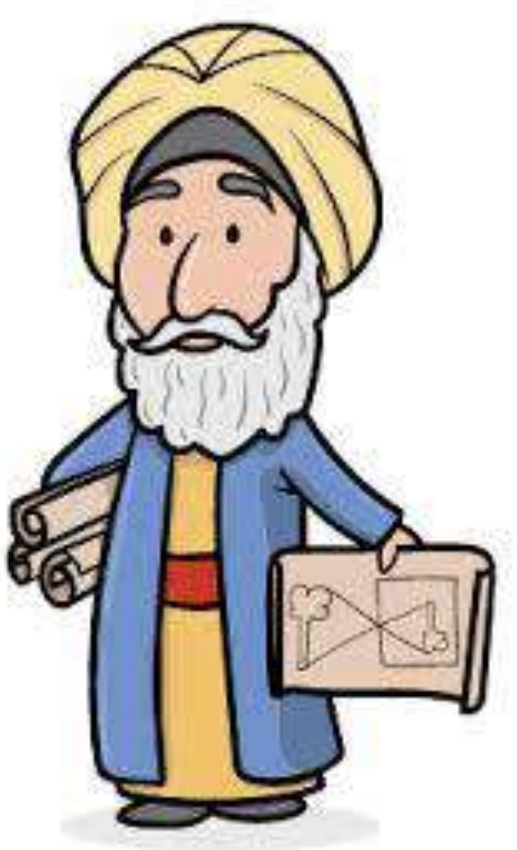


Archimedes

Archimedes (287-212 SM), seorang fisikawan sekaligus matematikawan dari Syracuse, Yunani. Pada abad kedua sebelum masehi, Archimedes talah menemukan ide penjumlahan untuk menentukan luas sebuah daerah tertutup dan volume dari benda putar. Diantaranya adalah rumus lingkaran, luas segmen parabola, volume bola, volume kerucut, serta volume benda putar yang lain. Ide penjumlahan ini merupakan salah satu konsep dasar dari Kalkulus Integral.

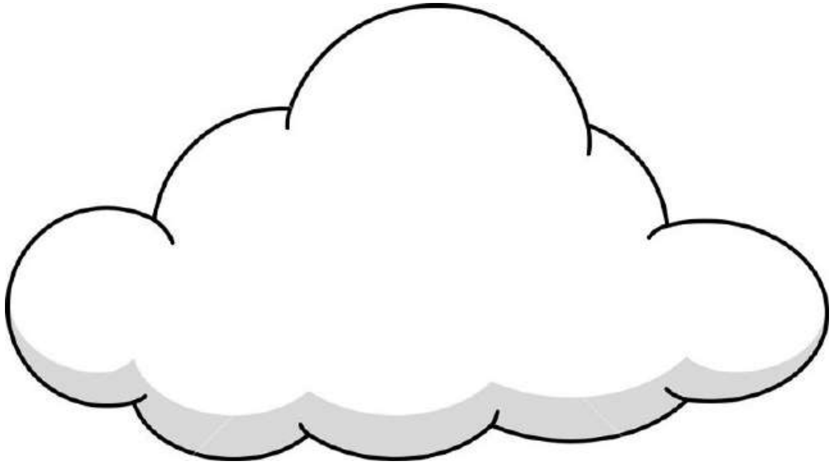


Alhazen

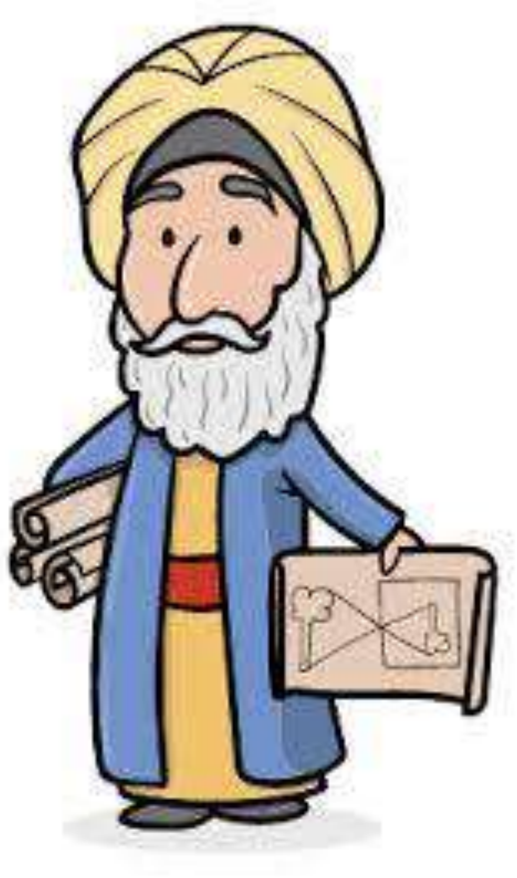


Ibn Al-Haytham atau Alhazen (sekitar tahun 1000), seorang matematikawan Irak. Ia menjadi orang pertama yang menurunkan rumus perhitungan hasil jumlah pangkat empat dan dengan menggunakan induksi matematika, ia mengembangkan suatu metode untuk menurunkan rumus umum dari hasil pangkat integral yang sangat penting terhadap perkembangan kalkulus integral.

Alhazen

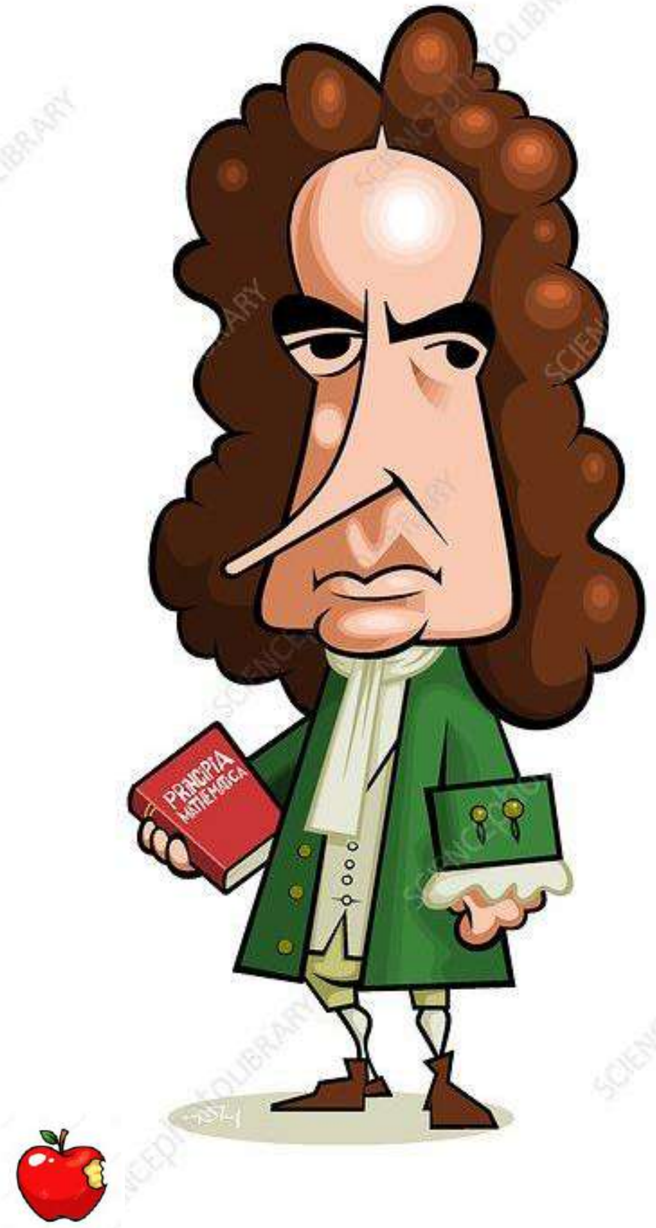


Ibn Al-Haytham atau Alhazen (sekitar tahun 1000), seorang matematikawan Irak. Ia menjadi orang pertama yang menurunkan rumus perhitungan hasil jumlah pangkat empat dan dengan menggunakan induksi matematika, ia mengembangkan suatu metode untuk menurunkan rumus umum dari hasil pangkat integral yang sangat penting terhadap perkembangan kalkulus integral.



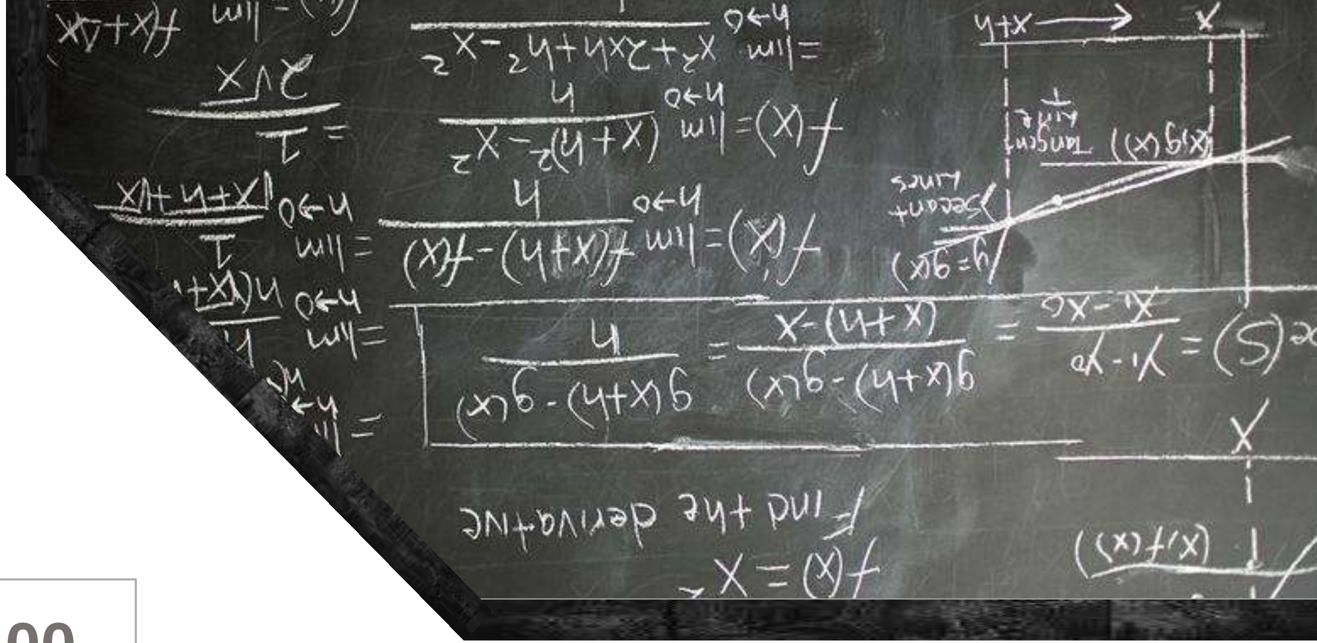
Isaac Newton

Isaac Newton (1642-1727 M), seorang matematikawan sekaligus fisikawan dari Inggris. Isaac Newton dan Gottfried wilhelm Leibniz dalam kurun waktu yang hampir bersamaan, meskipun bekerja sendiri-sendiri, telah menemukan hubungan antara Kalkulus Differansial dan Kalkulus Integral. Walaupun konsep luas daerah yang dibatasi oleh kurva tertutup (integral tertentu) telah lebih dahulu diketahui, tetapi Isaac Newton dan Leibniz merupakan dua tokoh terkemuka dalam sejarah Kalkulus. Sebab, mereka mampu mengungkapkan hubungan yang erat antara antiderivatif dengan intagral tertentu. Hubungan ini dikenal dengan Teorema Dasar Kalkulus.



Isaac Newton

Isaac Newton (1642-1727 M), seorang matematikawan sekaligus fisikawan dari Inggris. Isaac Newton dan Gottfried wilhelm Leibniz dalam kurun waktu yang hampir bersamaan, meskipun bekerja sendiri-sendiri, telah menemukan hubungan antara Kalkulus Differansial dan Kalkulus Integral. Walaupun konsep luas daerah yang dibatasi oleh kurva tertutup (integral tertentu) telah lebih dahulu diketahui, tetapi Isaac Newton dan Leibniz merupakan dua tokoh terkemuka dalam sejarah Kalkulus. Sebab, mereka mampu mengungkapkan hubungan yang erat antara antiderivatif dengan intagral tertentu. Hubungan ini dikenal dengan Teorema Dasar Kalkulus.



287-212 SM

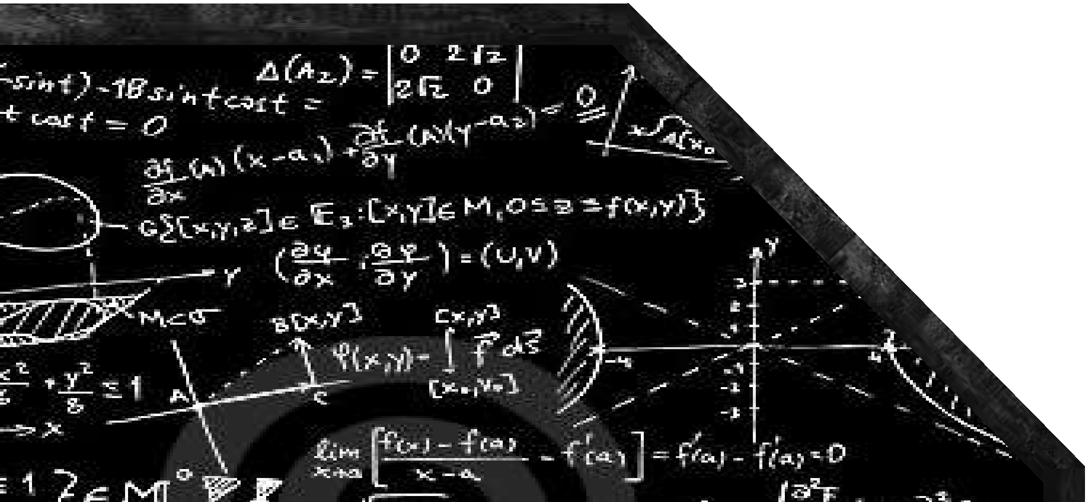
Archimedes

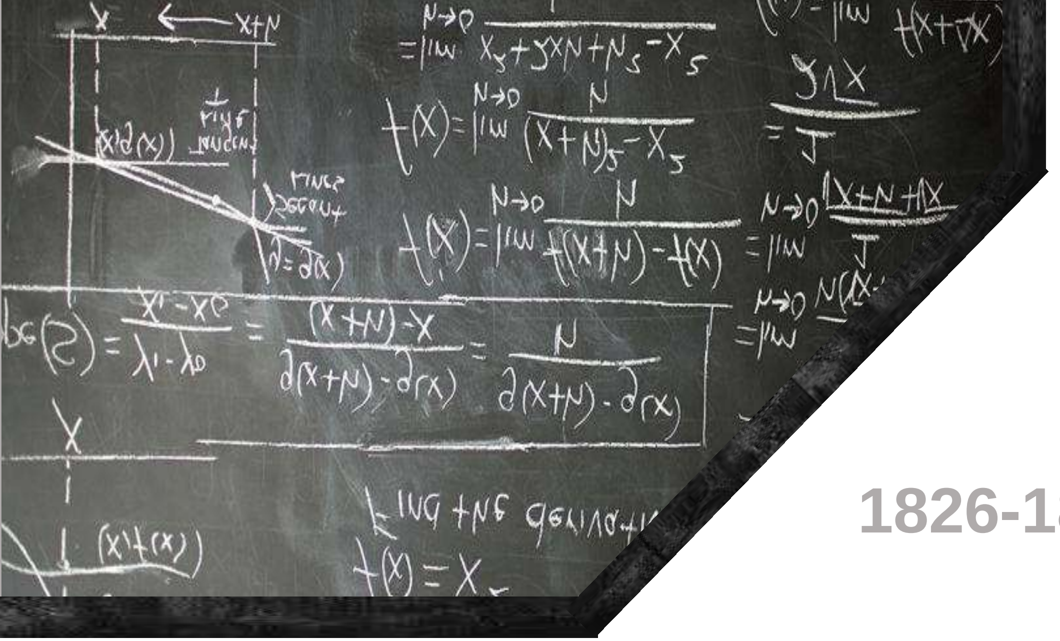
1000

Alhazen

1642-1727 M

Isaac Newton



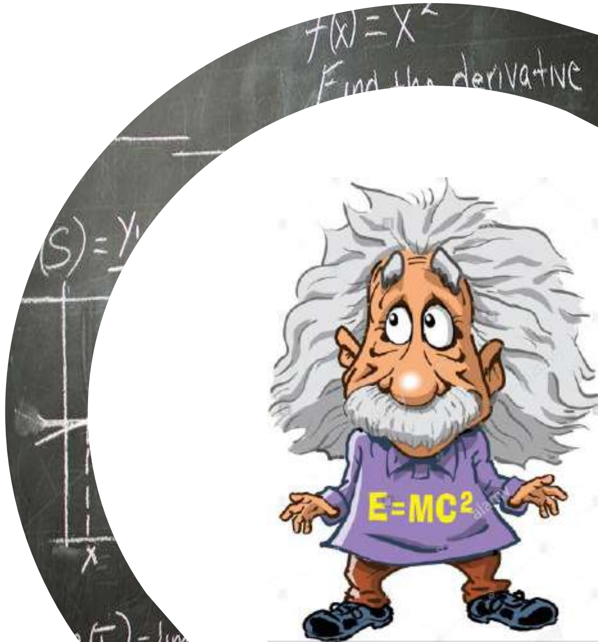


1826-1866 M

Riemann

1646-1716 M

Leibniz



Gottfried wilhelm Leibniz

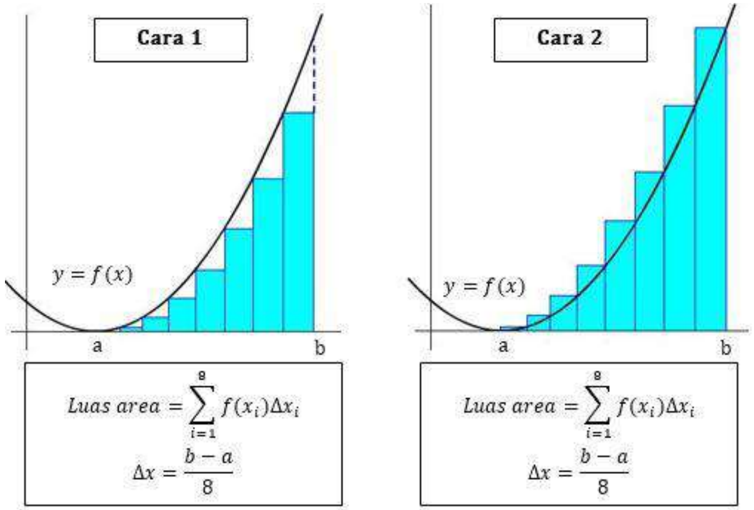
Gottfried wilhelm Leibniz (1646-1716 M), seorang ilmuwan jenius dari Leipzig, Jerman. Leibniz seorang ilmuwan serba-bisa. Ia mendalami bidang hukum, agama, filsafat, sejarah, politik, geologi, dan matematika. Selain Teorema Dasar Kalkulus yang dikembangkan bersama Newton, Leibniz juga terkenal dengan pemakaian lambang matematika. Lambang dx/dy bagi turunan dan lambang ∫ bagi integral merupakan lambang-lambang yang diusulkan oleh Leibniz dalam Hitung Differensial dan Hitung Integral.

Gottfried wilhelm Leibniz

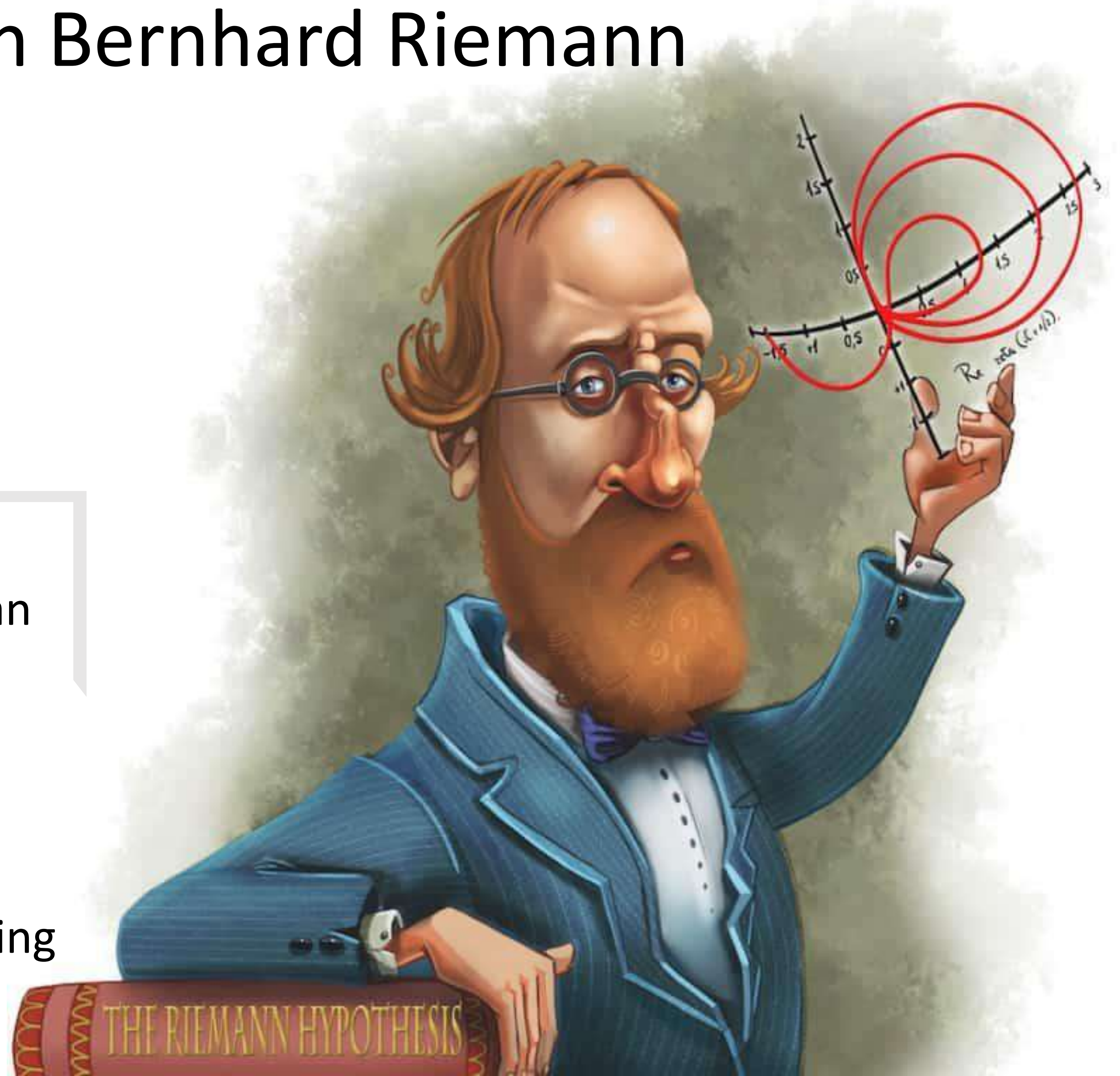
$$\int$$

Gottfried wilhelm Leibniz (1646-1716 M), seorang ilmuwan jenius dari Leipzig, Jerman. Leibniz seorang ilmuwan serba-bisa. Ia mendalami bidang hukum, agama, filsafat, sejarah, politik, geologi, dan matematika. Selain Teorema Dasar Kalkulus yang dikembangkan bersama Newton, Leibniz juga terkenal dengan pemakaian lambang matematika. Lambang dx/dy bagi turunan dan lambang ∫ bagi integral merupakan lambang-lambang yang diusulkan oleh Leibniz dalam Hitung Differensial dan Hitung Integral.

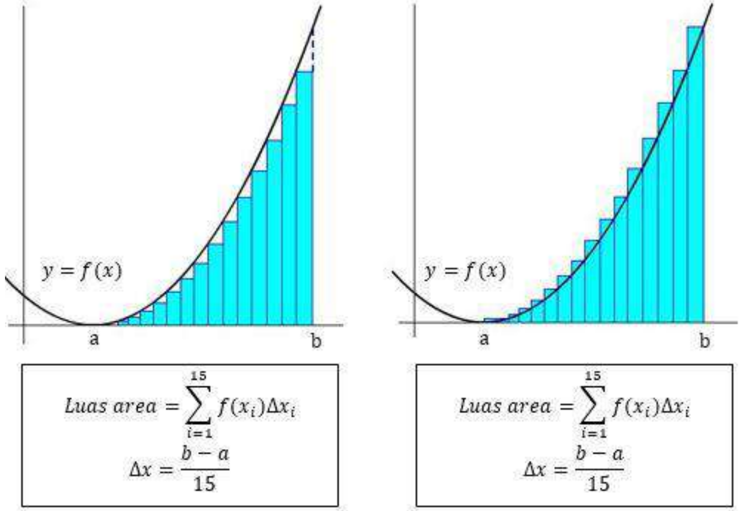
George Friedrich Bernhard Riemann



George Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866 M), seorang matematikawan dari Gottingen, Jerman. Meskipun Teorema Dasar Kalkulus telah dikemukakan oleh Newton, namun Riemann memberi definisi mutakhir tentang integral tentu. Atas sumbangannya inilah integral tentu sering disebut sebagai Integral Riemann.

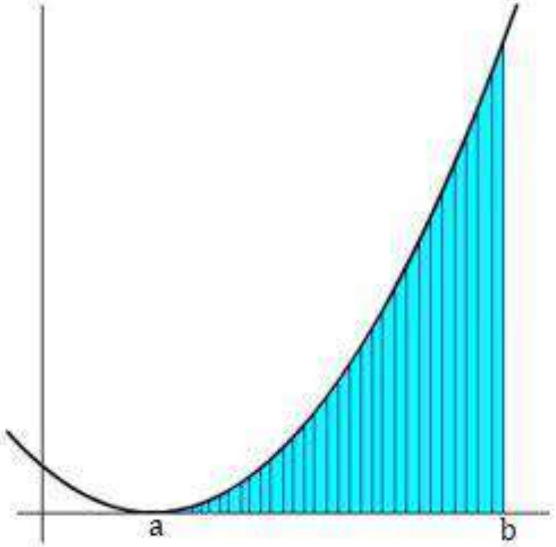


George Friedrich Bernhard Riemann



George Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866 M), seorang matematikawan dari Gottingen, Jerman. Meskipun Teorema Dasar Kalkulus telah dikemukakan oleh Newton, namun Riemann memberi definisi mutakhir tentang integral tentu. Atas sumbangannya inilah integral tentu sering disebut sebagai Integral Riemann.

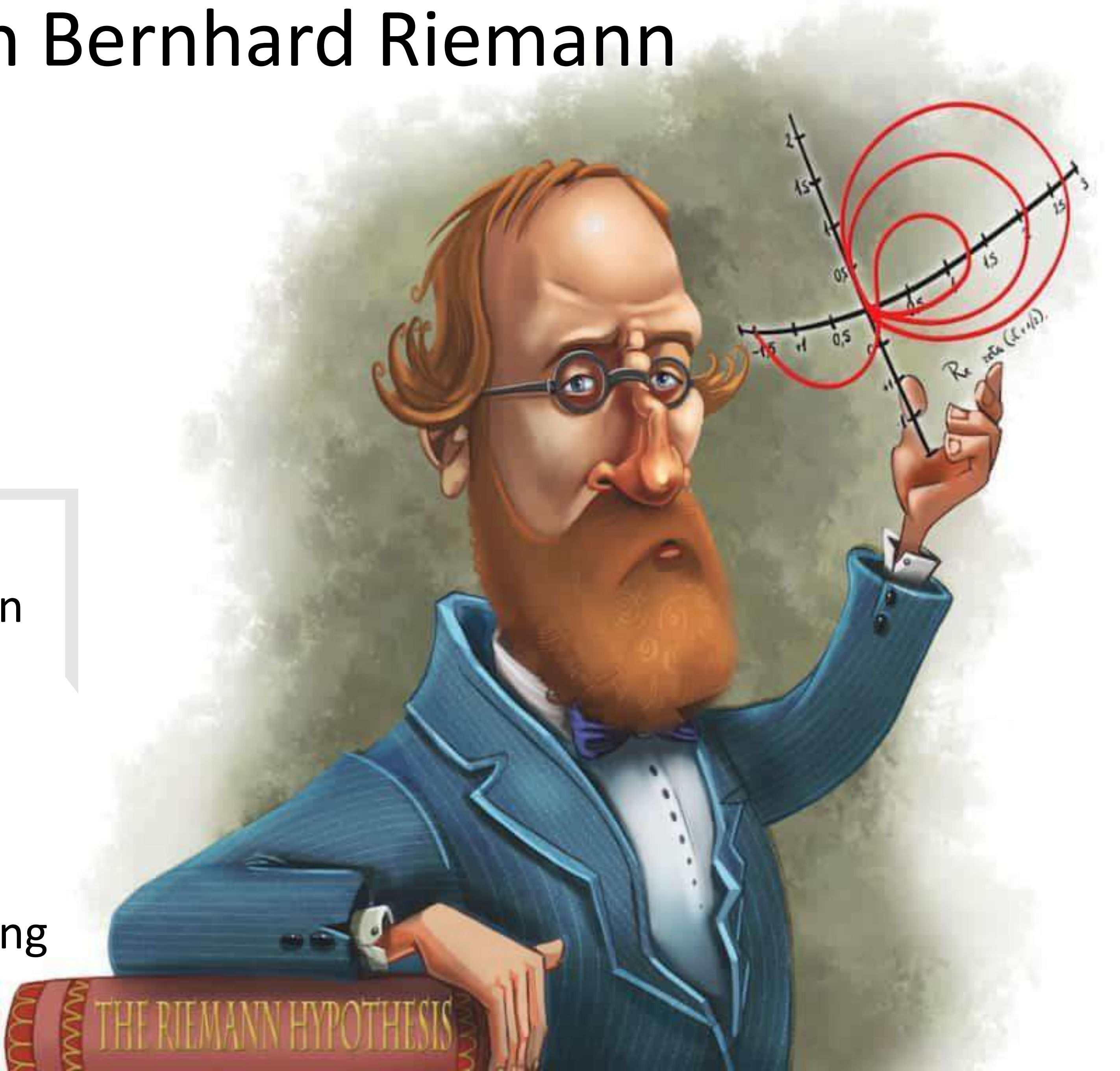
George Friedrich Bernhard Riemann

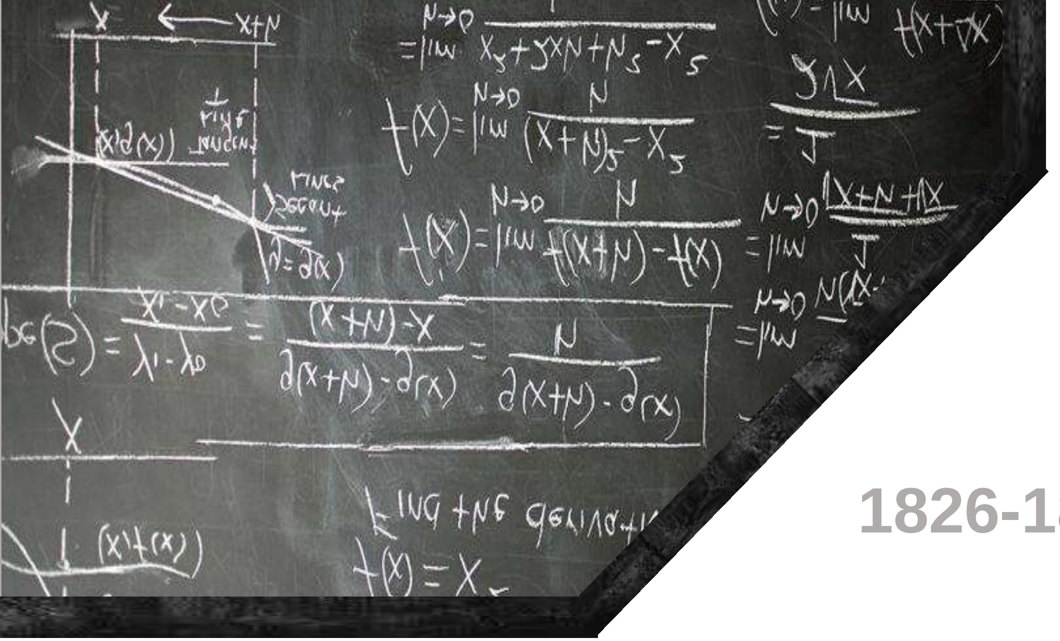


$$\text{Luas area} = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

George Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866 M), seorang matematikawan dari Gottingen, Jerman. Meskipun Teorema Dasar Kalkulus telah dikemukakan oleh Newton, namun Riemann memberi definisi mutakhir tentang integral tentu. Atas sumbangannya inilah integral tentu sering disebut sebagai Integral Riemann.



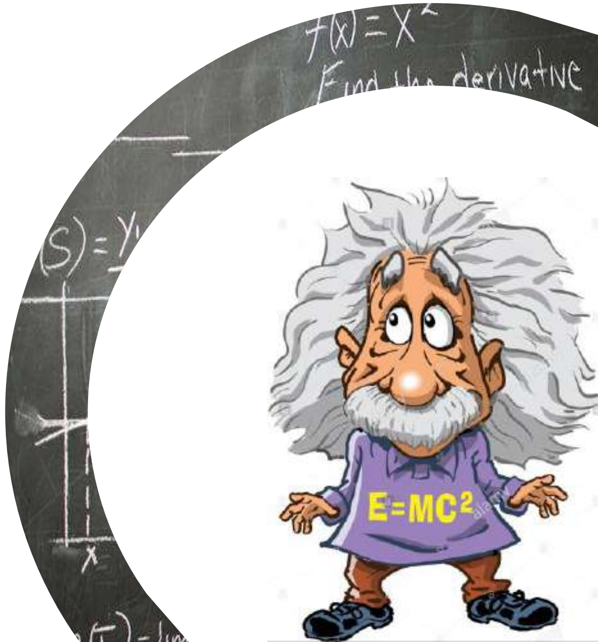


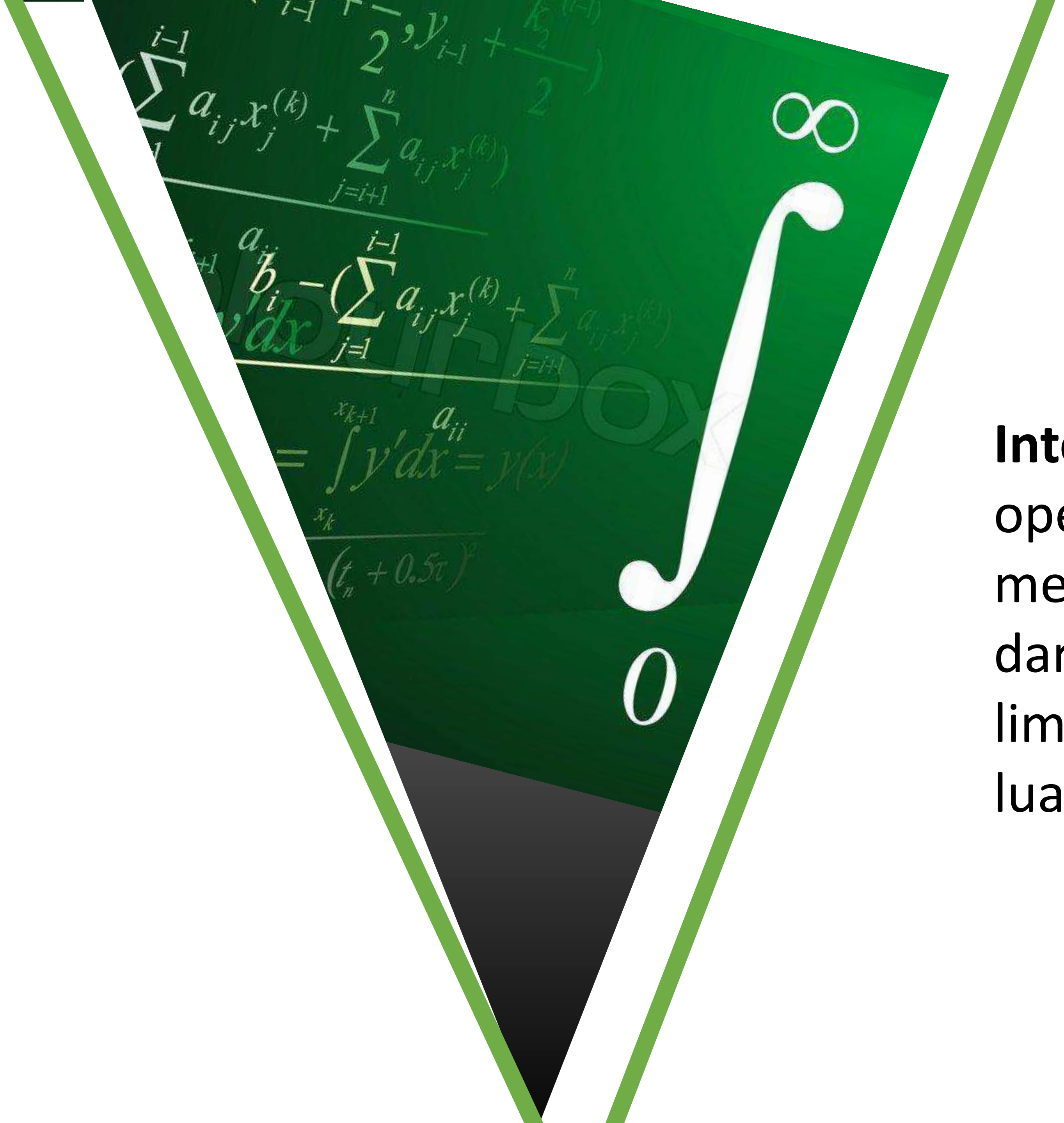
1826-1866 M

Riemann

1646-1716 M

Leibniz



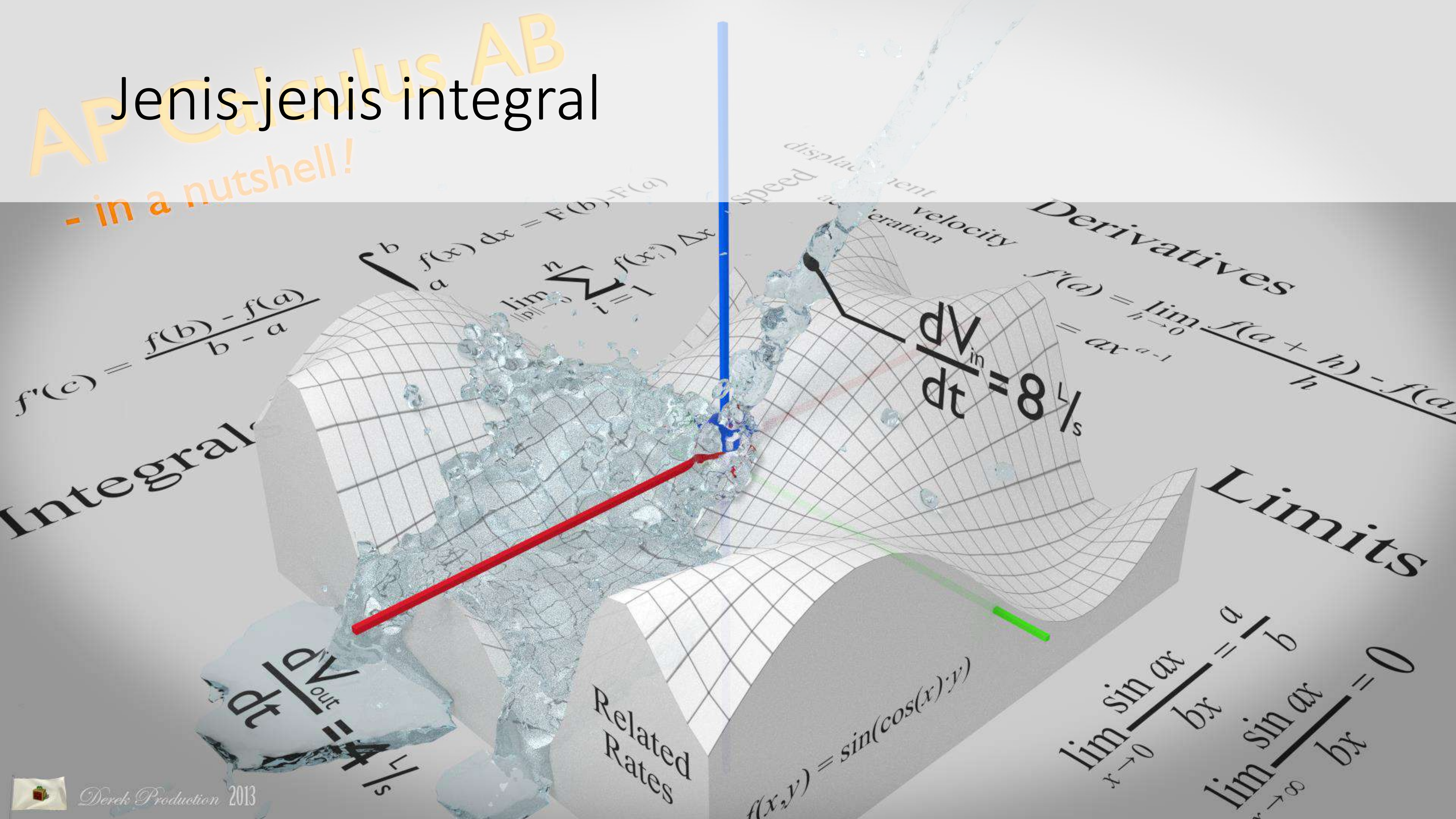


Integral merupakan bentuk operasi matematika yang menjadi kebalikan (invers) dari operasi turunan dan limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu.

Integral merupakan bentuk operasi matematika yang menjadi kebalikan (invers) dari operasi turunan dan limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu.

Berdasarkan pengertian tersebut ada dua hal yang dilakukan dalam integral sehingga dikategorikan menjadi 2 jenis integral. Pertama, integral sebagai invers/ kebalikan dari turunan disebut sebagai Integral Tak Tentu. Kedua, integral sebagai limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu disebut integral tentu.

Jenis-jenis integral



Integral Tak Tentu

- Seperti yang telah disebutkan sebelumya, Integral tak tentu atau yang dalam bahasa Inggris biasa disebut sebagai ***Indefinite Integral*** maupun ada juga yang menyebutnya sebagai ***Antiderivatif*** merupakan sebuah bentuk operasi pengintegralan pada suatu fungsi yang menghasilkan suatu fungsi baru.
- Fungsi ini belum mempunyai nilai pasti sampai cara pengintegralan yang menghasilkan fungsi tidak tentu ini disebut sebagai integral tak tentu.
- Apabila f berwujud integral tak tentu dari sebuah fungsi F maka F’= f.
- Proses memecahkan antiderivatif adalah antidiferensiasi Antiderivatif yang berhubungan dengan integral lewat “***Teorema dasar kalkulus***”. Serta memberi cara mudah untuk menghitung integral dari berbagai fungsi.
- Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, integral tak tentu dalam matematika merupakan invers/kebalikan dari turunan.
- Turunan dari sebuah fungsi, apabila diintegralkan akan menghasilkan fungsi itu sendiri.

Mari perthatikan baik-baik contoh dari beberapa turunan dalam fungsi aljabar di bawah ini:

- Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3$ adalah $y' = 3x^2$
- Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3 + 8$ adalah $y' = 3x^2$
- Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3 + 17$ adalah $y' = 3x^2$
- Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3 - 6$ adalah $y' = 3x^2$

- Seperti yang telah kita pelajari pada materi turunan, variabel dalam sebuah fungsi akan mengalami penurunan pangkat. Berdasarkan contoh di atas, maka dapat kita ketahui jika terdapat banyak fungsi yang mempunyai hasil turunan yang sama yakni $y' = 3x^2$.Fungsi dari variabel x^3 maupun fungsi dari variabel x^3 yang dikurang atau ditambah pada sebuah bilangan (contohnya: *+8, +17,* atau *-6*) mempunyai turunan yang sama.

Apabila turunan itu kita integralkan, maka harusnya akan menjadi fungsi-fungsi awal sebelum diturunkan. Tetapi, dalam kasus yang tidak diketahui fungsi awal dari sebuah turunan, maka hasil integral dari turunan tersebut bisa kita tulis menjadi:

$$f(x) = y = x^3 + C$$

Dengan nilai C dapat berapa pun. Notasi C ini juga disebut sebagai **konstanta integral**. Integral tak tentu dari sebuah fungsi dinotasikan seperti berikut:

$$\int f(x)dx$$

Dalam notasi di atas dapat kita baca integral terhadap *x*".
notasi disebut integran. Secara umum integral dari fungsi *f(x)*
merupakan penjumlahan *F(x)* dengan *C* atau:

$$\int f((x)dx = Fx)$$

Sebab integral dan juga turunan saling berkaitan, maka rumus integral bisa didapatkan dari rumusan penurunan. Apabila turunan:

$$\frac{d}{dx}\frac{a}{(n+1)}x^{n+1} = ax^{n}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{a}{(n+1)}x^{n+1} = ax^n$$

Maka rumus integral aljabar didapatkan:

$$\int a\,x^n dx = \frac{a}{(n+1)}x^{n+1} + C$$

dengan syarat apabila $n \neq 1$

Sebagai contoh perhatikan beberapa integral aljabar fungsi-fungsi berikut ini:

- $\int 4x^3 dx = \frac{4}{(3+1)} x^{(3+1)} + C = x^4 + C$
- $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{1}{(-3+1)} x^{(-3+1)} + C = -\frac{1}{2} x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$
- $\int 4x^3 - 3x^2 dx = \frac{4}{(3+1)} x^{(3+1)} + \frac{3}{(2+1)} x^{(2+1)} + C = x^4 + x^3 + C$

Cara Membaca Integral Tak Tentu

Setelah membaca uraian di atas, taukah kalian cara membaca kalimat integral? Integral di baca seperti ini:

$$\int f(x)dx$$

Dibaca : "***Integral Tak Tentu Dari Fungsi f(x) Terhadap Variabel X.***"

Integral Tak Tentu Fungsi Trigonometri

Rumus-rumus:

$$\int sin\, x\, dx = -\,cos\, x + C$$

$$\int cos\, x\;\; dx = sin\, x + C$$

$$\int tan\, x\;\; dx = In|sec\, x| + C$$

$$\int sin(ax + b)dx = -\frac{1}{a}cos(ax + b) + C$$

$$\int cos(ax + b)dx = \frac{1}{a}sin(ax + b) + C$$

$$\int sin^m x\, cos\, x\, dx = \frac{1}{m + 1}sin^{\mathrm{m+1}}\, x + C$$

$$\int cos^m\, x\;\; sin\, x\, dx = \frac{-1}{m + 1}cos^{m+1}\, x + C$$

$$\int sec^2\, x\, dx = tan\, x + C$$

$$\int csc^2\, x\, dx = -\,cot\, x + C$$

$$\int sec\, x\, tan\, x\, dx = sec\, x + C$$

$$\int csc\, x + cot\, x\, dx = -\,csc\, x + C$$

Contoh soal:

Dik:

$$\int 2sin(4x+9)dx$$

Peny:

$$= 2\int sin(4x+9)dx \longrightarrow \int sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}cos(ax+b)+C$$

$$= 2\int sin\left(-\frac{1}{4}\cos(4x+9)\right)+C$$

$$= -\frac{2}{4}\cos(4x+9)+C$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(4x+9)+C$$

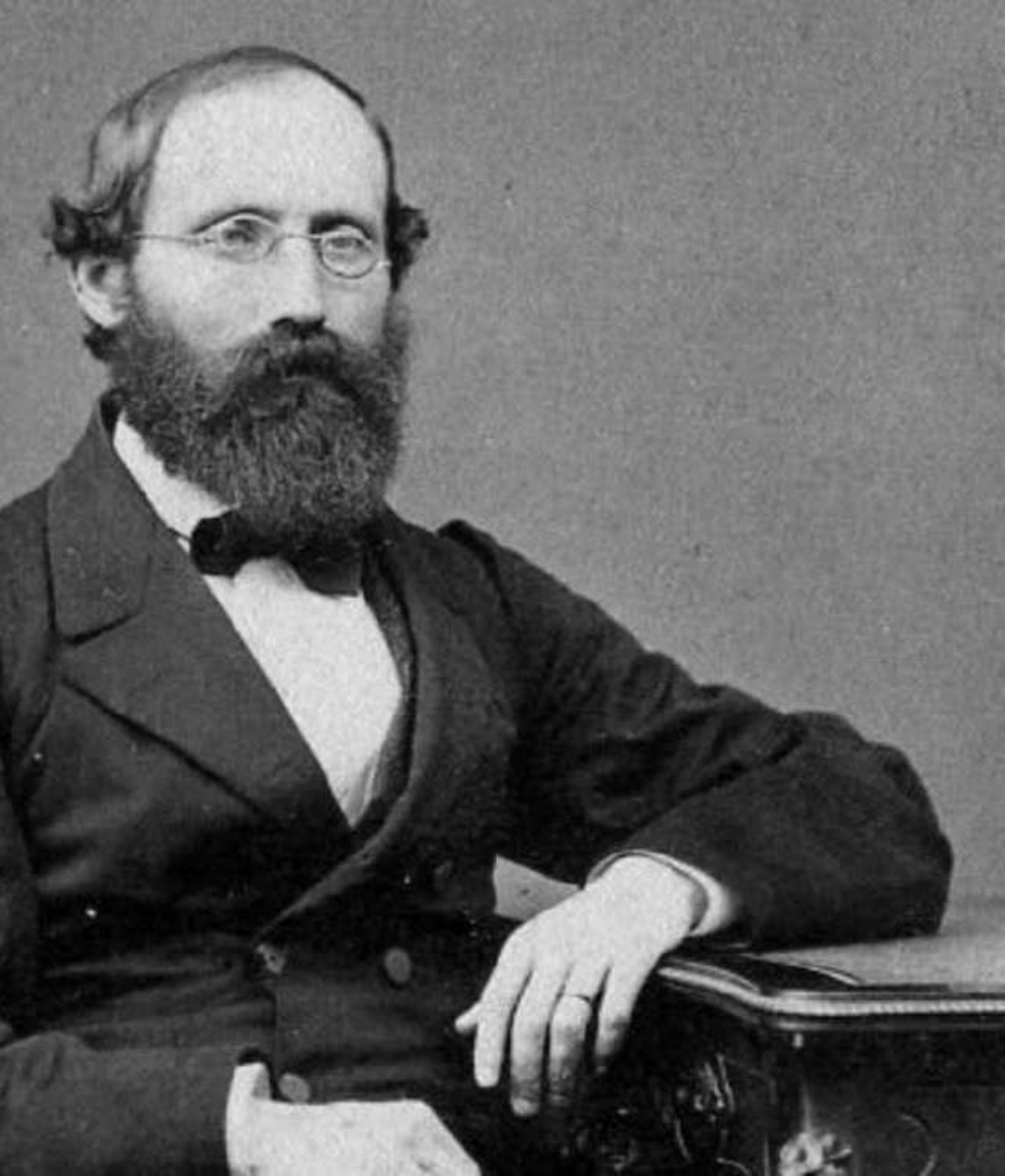
Integral Tentu

Diketahui fungsi $\boldsymbol{f}$ kontinu pada interval $\boldsymbol{a \leq x \leq b}$ jika $\boldsymbol{f(x)}$ merupakan integral dari $\boldsymbol{f(x)}$, maka:

$$\int_a^b f(x)\, dx = [f(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

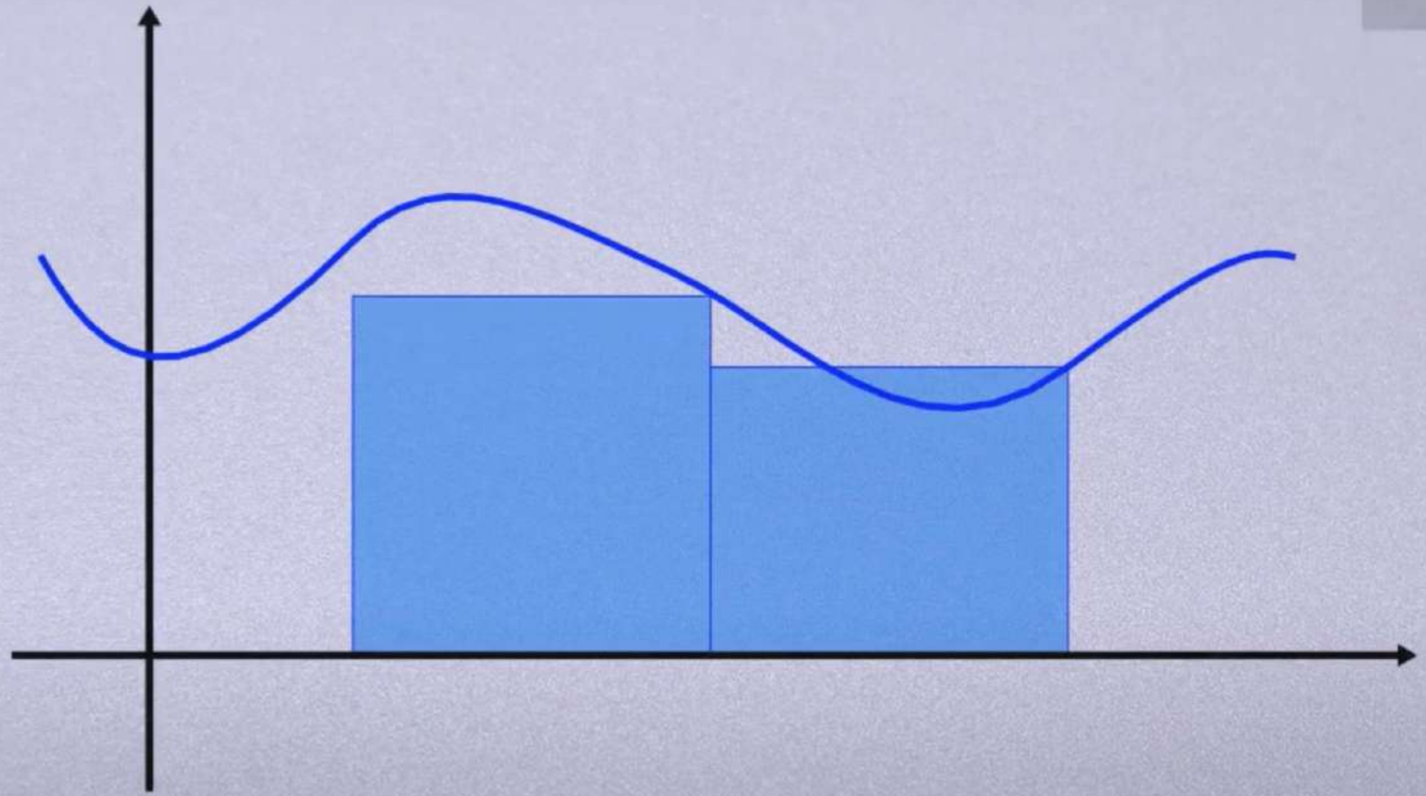
Sifat-sifat Integral Tentu:

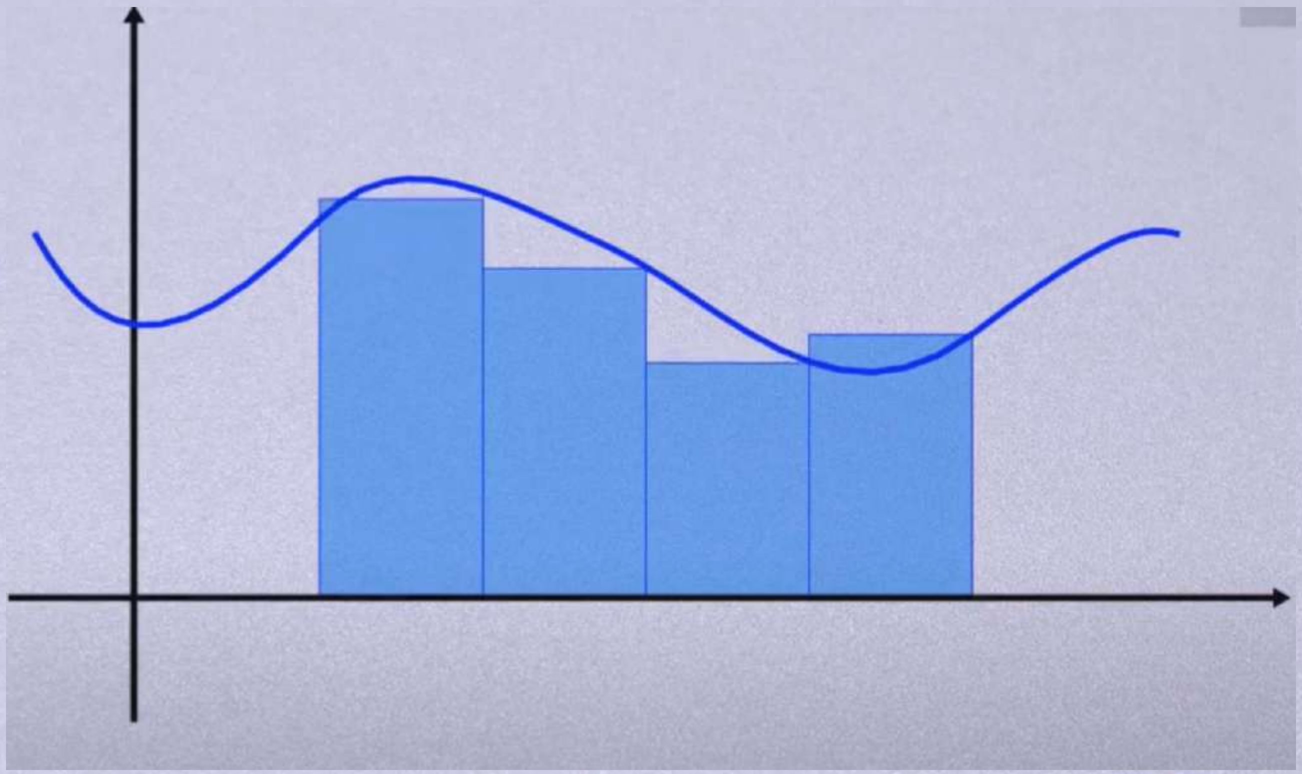
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx; a \leq c \leq b$
- $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^a f(x)dx = 0$

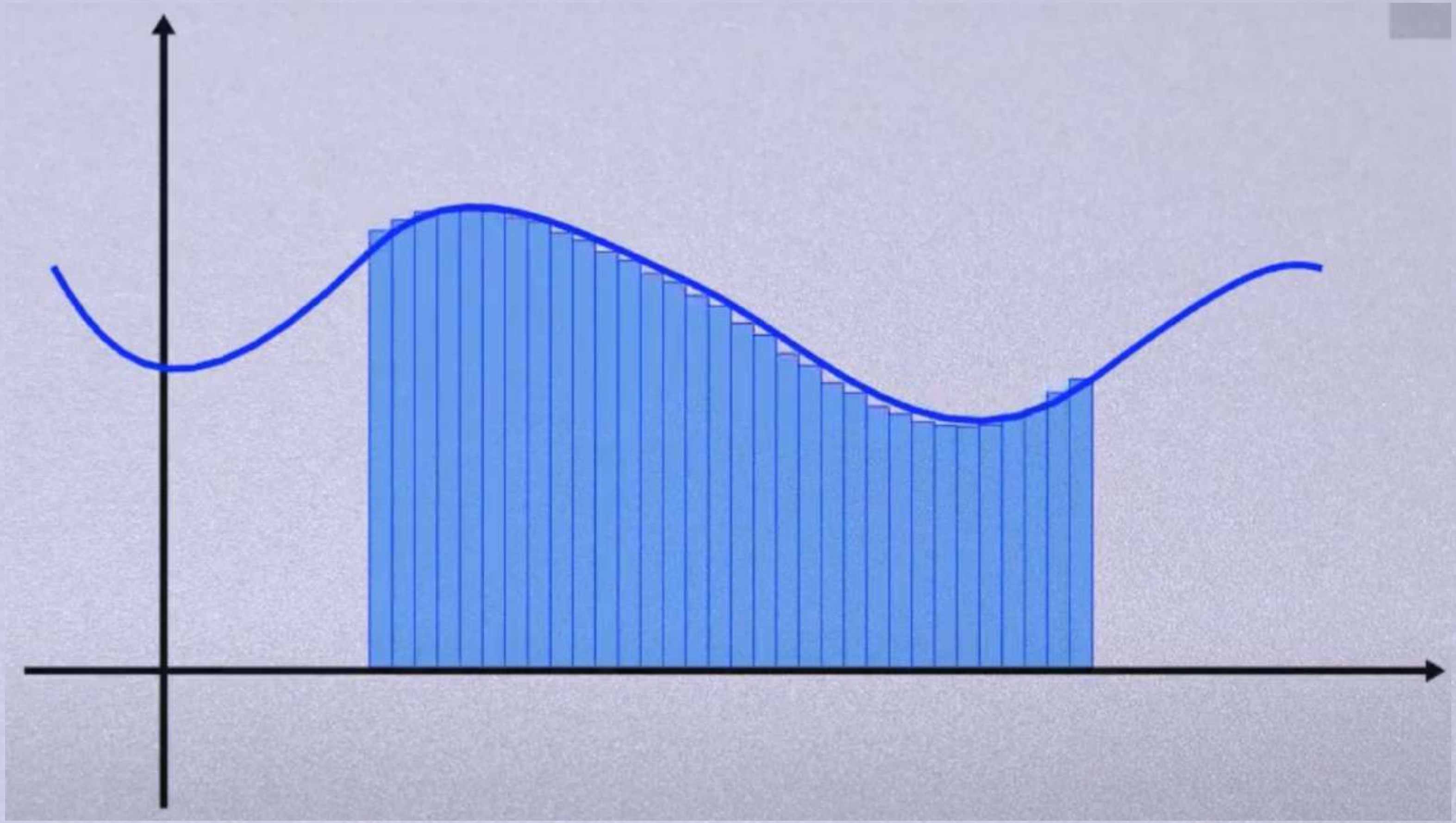


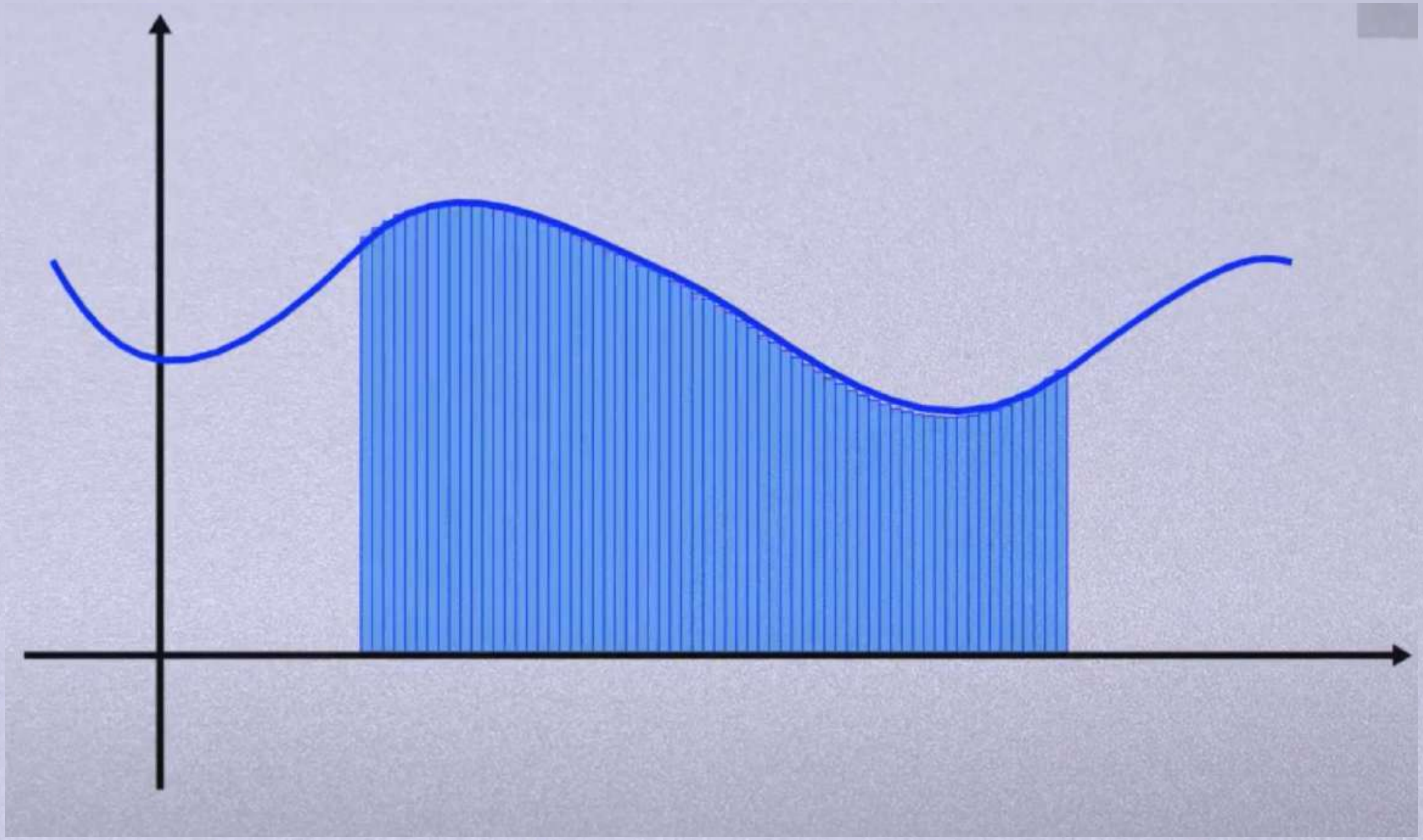
- **Integral Riemann**, dalam cabang matematika yang dikenal sebagai analisis riil, merupakan definisi ketat pertama integral sebuah fungsi dalam sebuah selang. Meskipun integral Riemann tidak cocok untuk banyak kegunaan teoretis, integral ini merupakan salah satu integral yang paling mudah untuk didefinisikan.

Jumlah Riemann Kanan









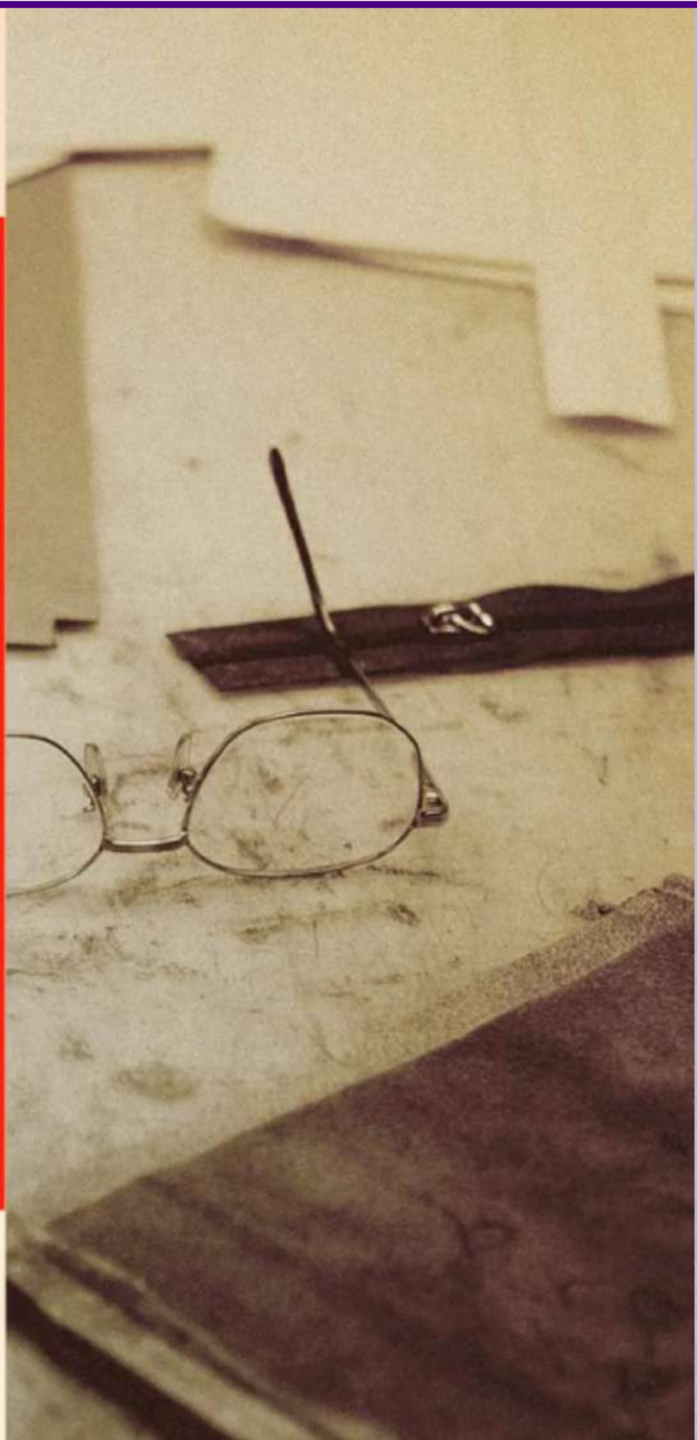
Banyak sub-interval

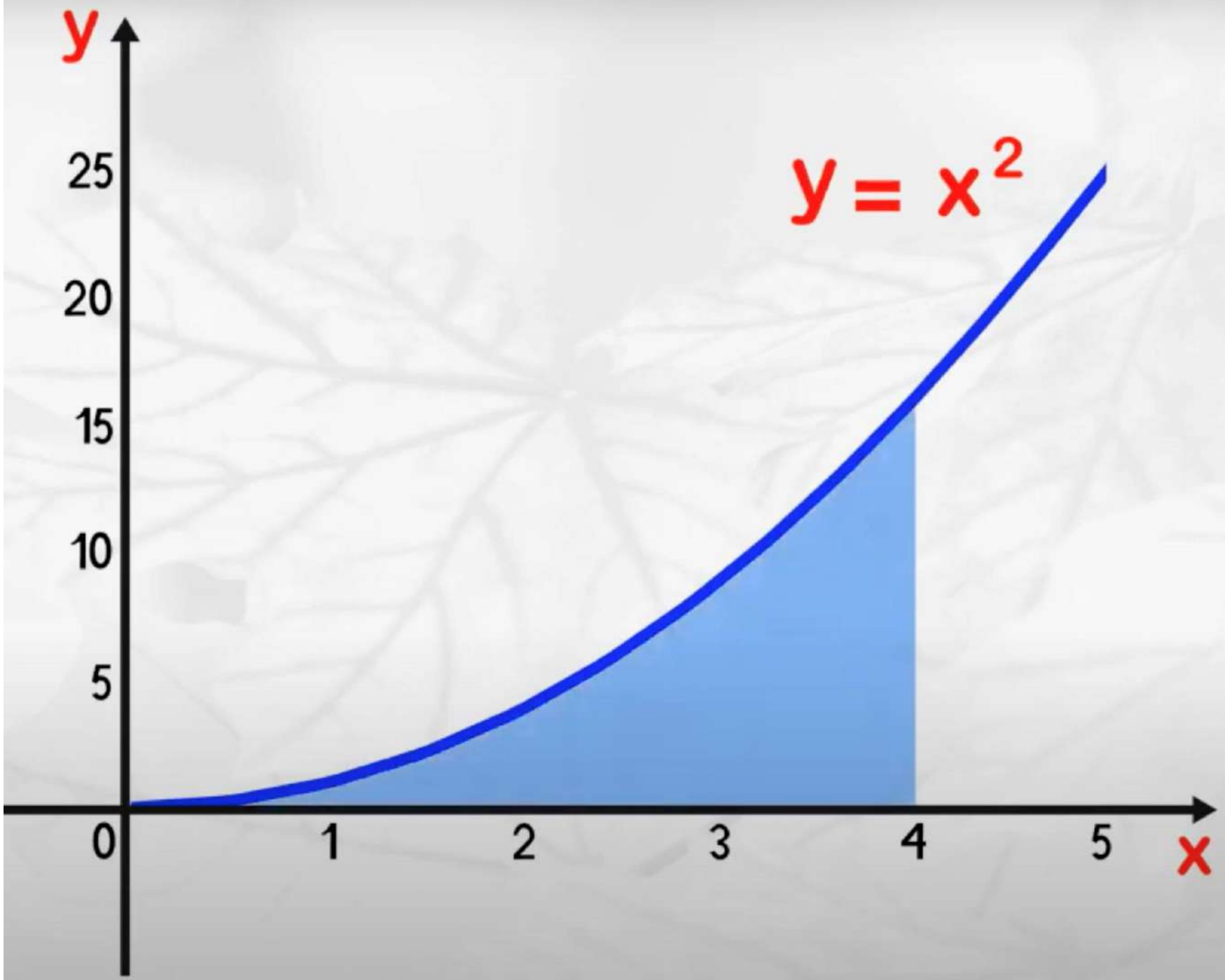
Lebar sub-interval

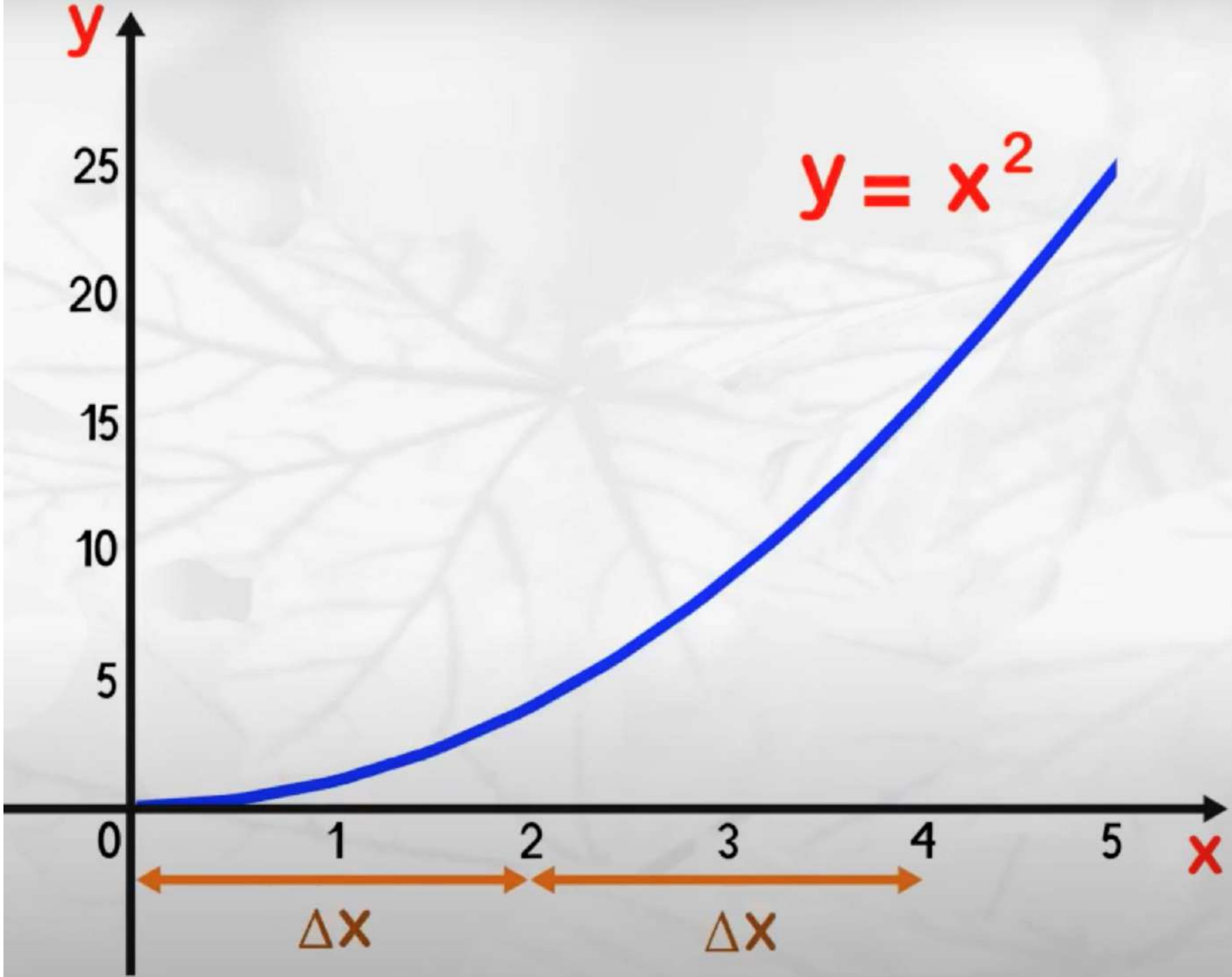
Sisi sentuh

Luas setiap sub-interval

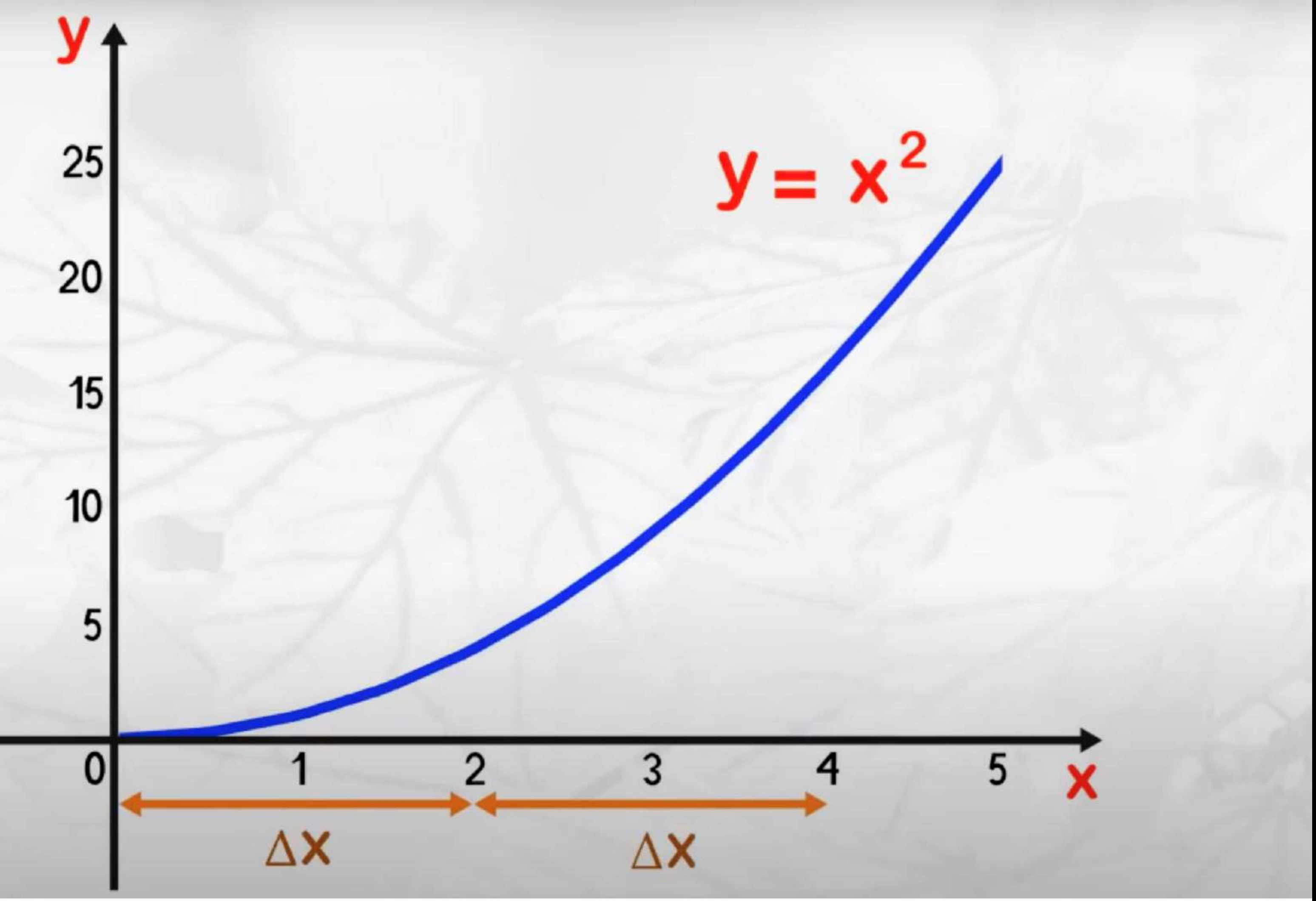
Jumlah luas sub-interval




y
25
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
x
y = x^2

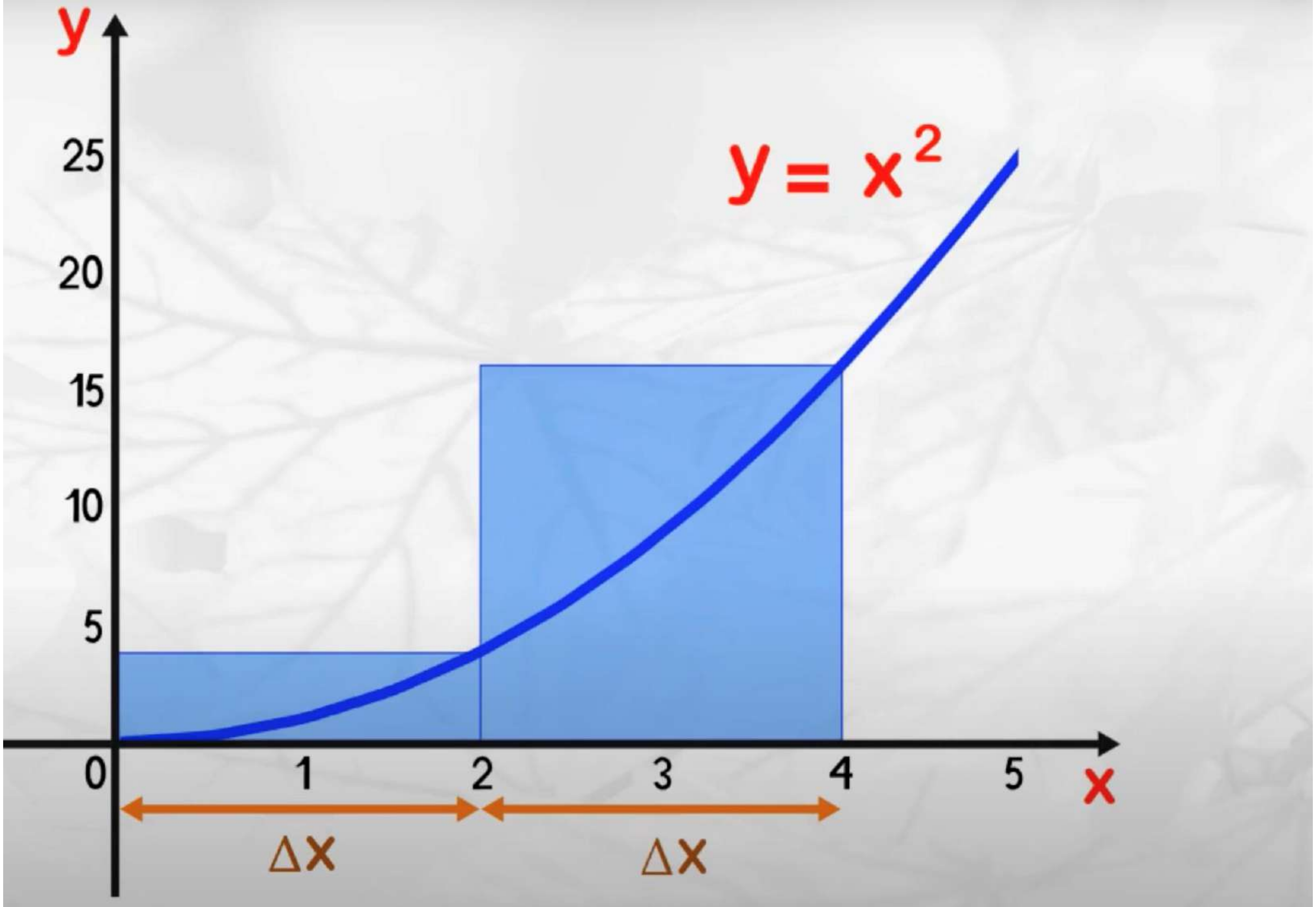


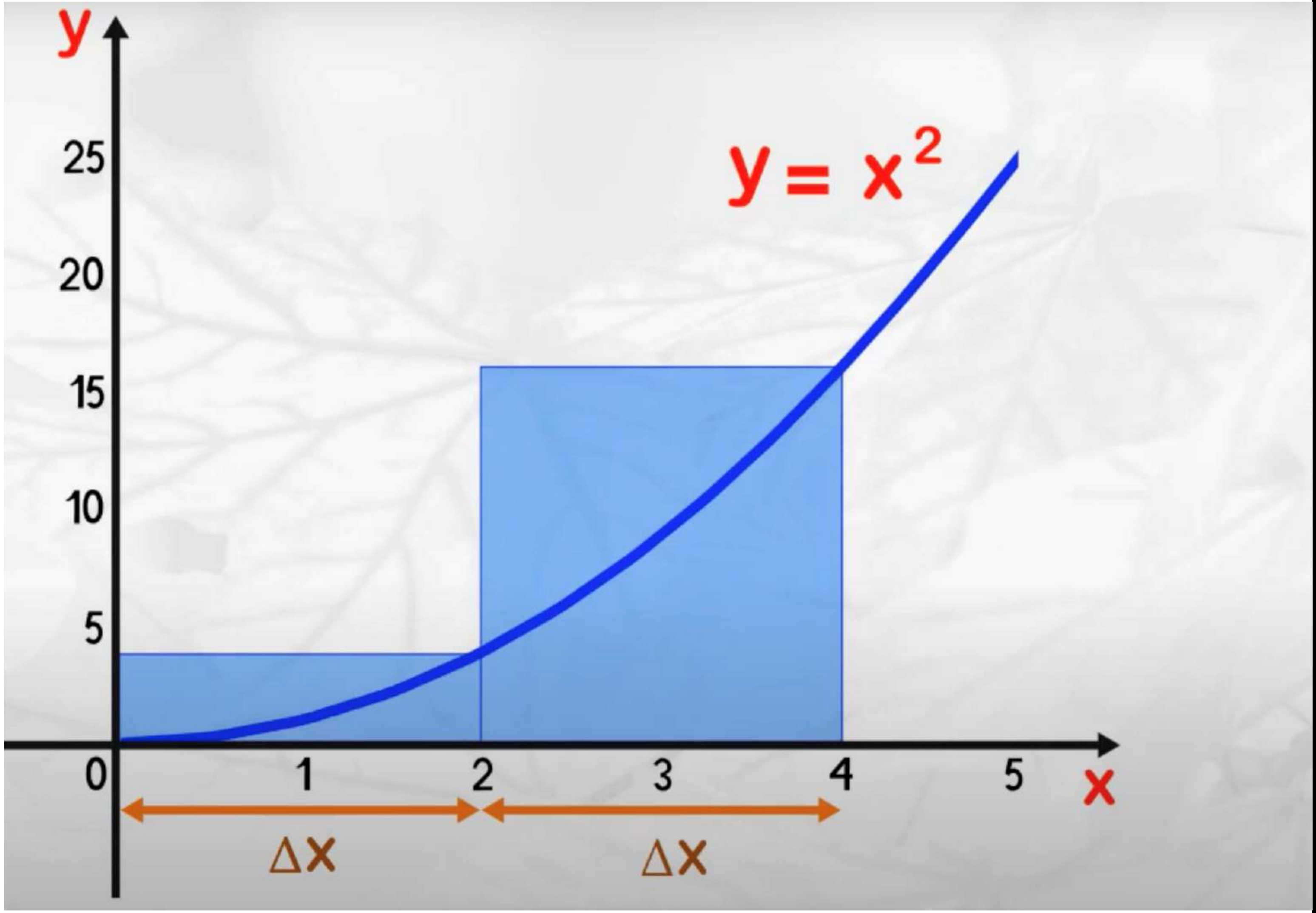
y
25
20
15
10
5
0
$y = x^2$
1
2
3
4
5
x
Δx
Δx



Lebar sub-interval:

$$\Delta x = \frac{4-0}{2} = 2$$


y
25
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
x
y = x²
Δx
Δx



Lebar sub-interval:

$$\Delta x = \frac{4-0}{2} = 2$$

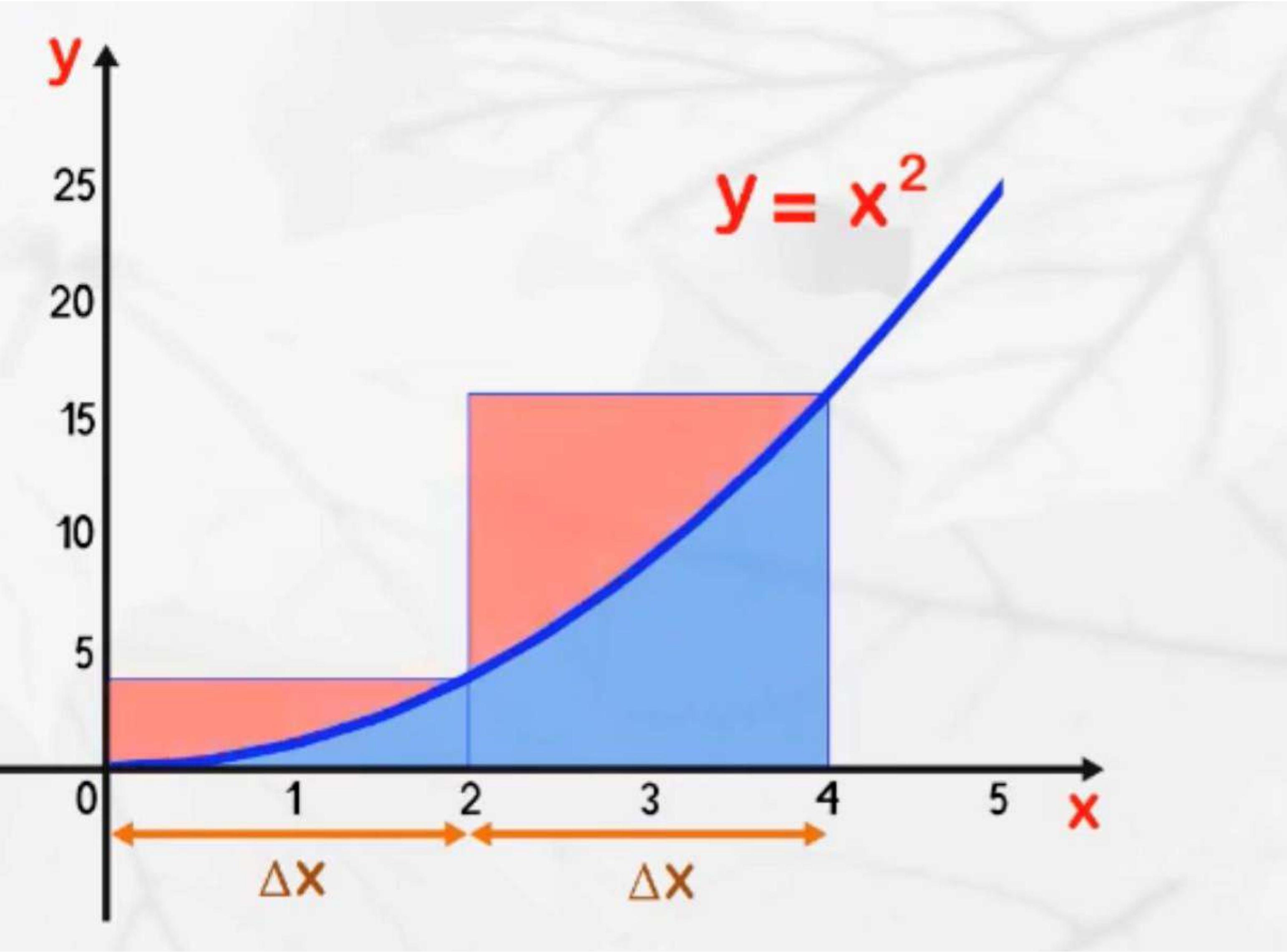
Luas sub-interval:

$$L■_1 = 2(2)^2 = 8$$

$$L■_2 = 2(4)^2 = 32$$

Jumlah Luas sub-interval:

$$L■ = L■_1 + L■_2$$
$$= 40$$



Lebar sub-interval:

$$\Delta x = \frac{4-0}{2} = 2$$

Luas sub-interval:

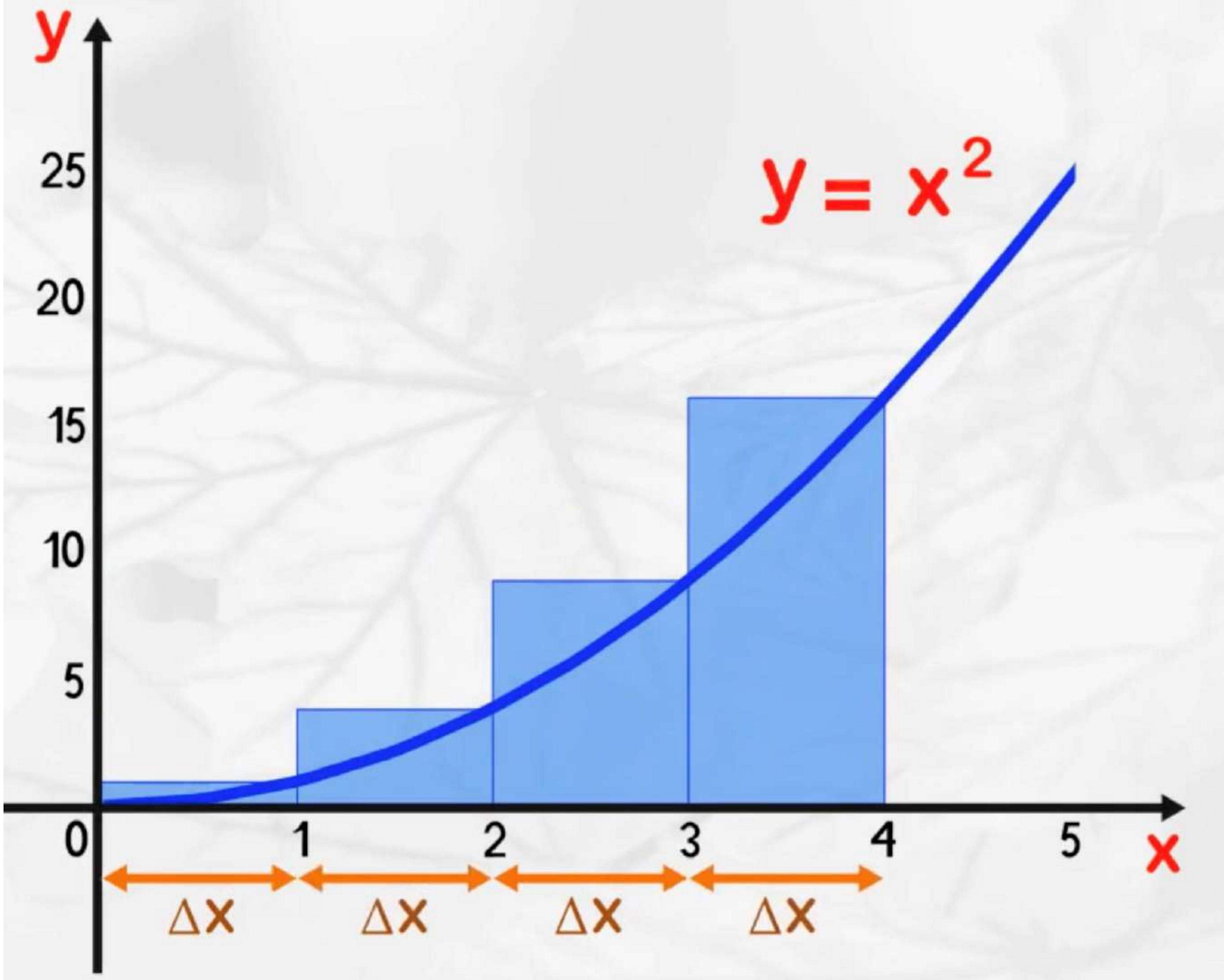
$$L■_1 = 2(2)^2 = 8$$

$$L■_2 = 2(4)^2 = 32$$

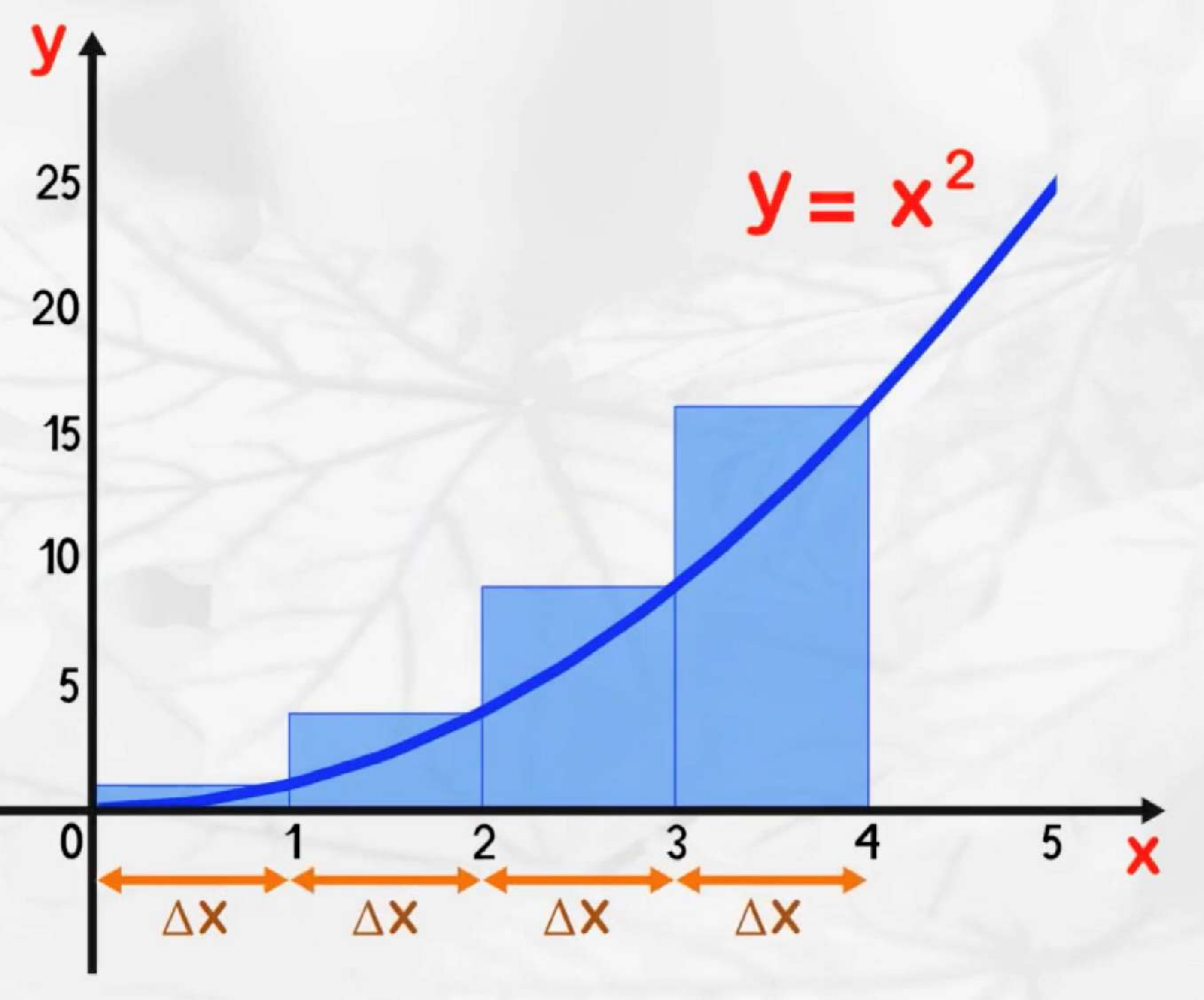
Jumlah Luas sub-interval:

$$L■ = L■_1 + L■_2$$

$$= 40$$



y
25
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
x
y = x²
Δx
Δx
Δx
Δx



Lebar sub-interval:

$$\Delta x = \frac{4-0}{4} = 1$$

Luas sub-interval:

$$L\blacksquare_1 = 1(1)^2 = 1$$

$$L\blacksquare_2 = 1(2)^2 = 4$$

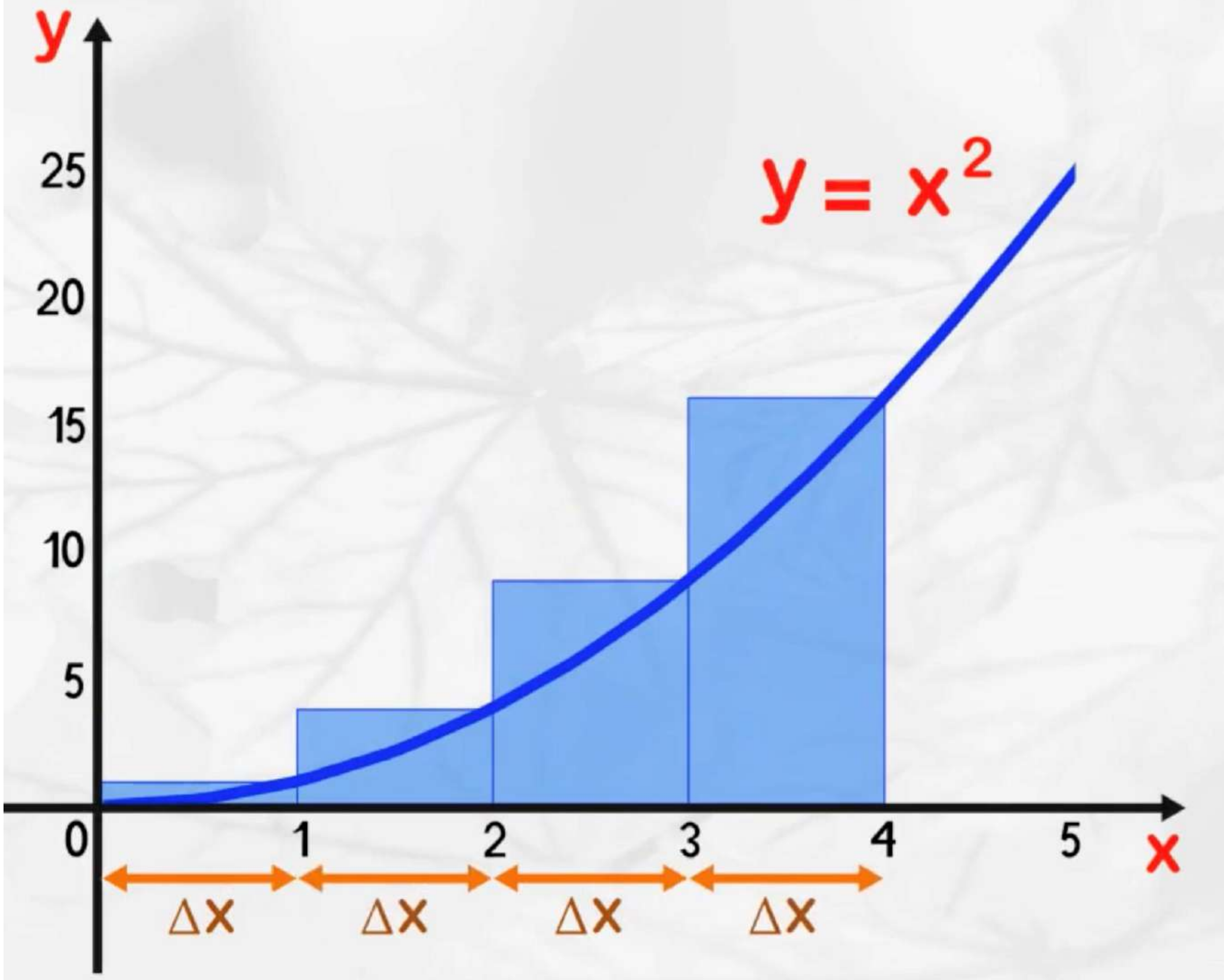
$$L\blacksquare_3 = 1(3)^2 = 9$$

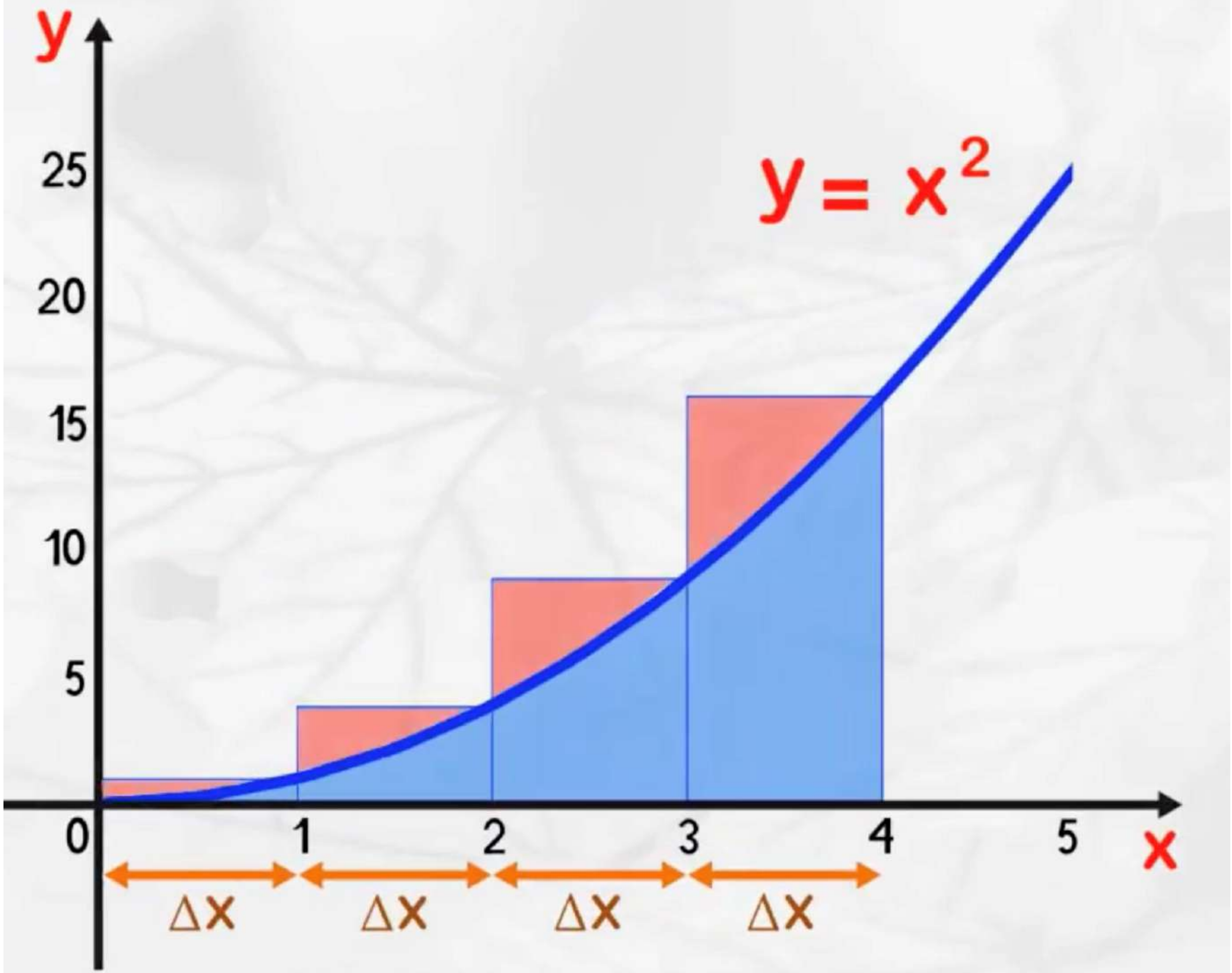
$$L\blacksquare_4 = 1(4)^2 = 16$$

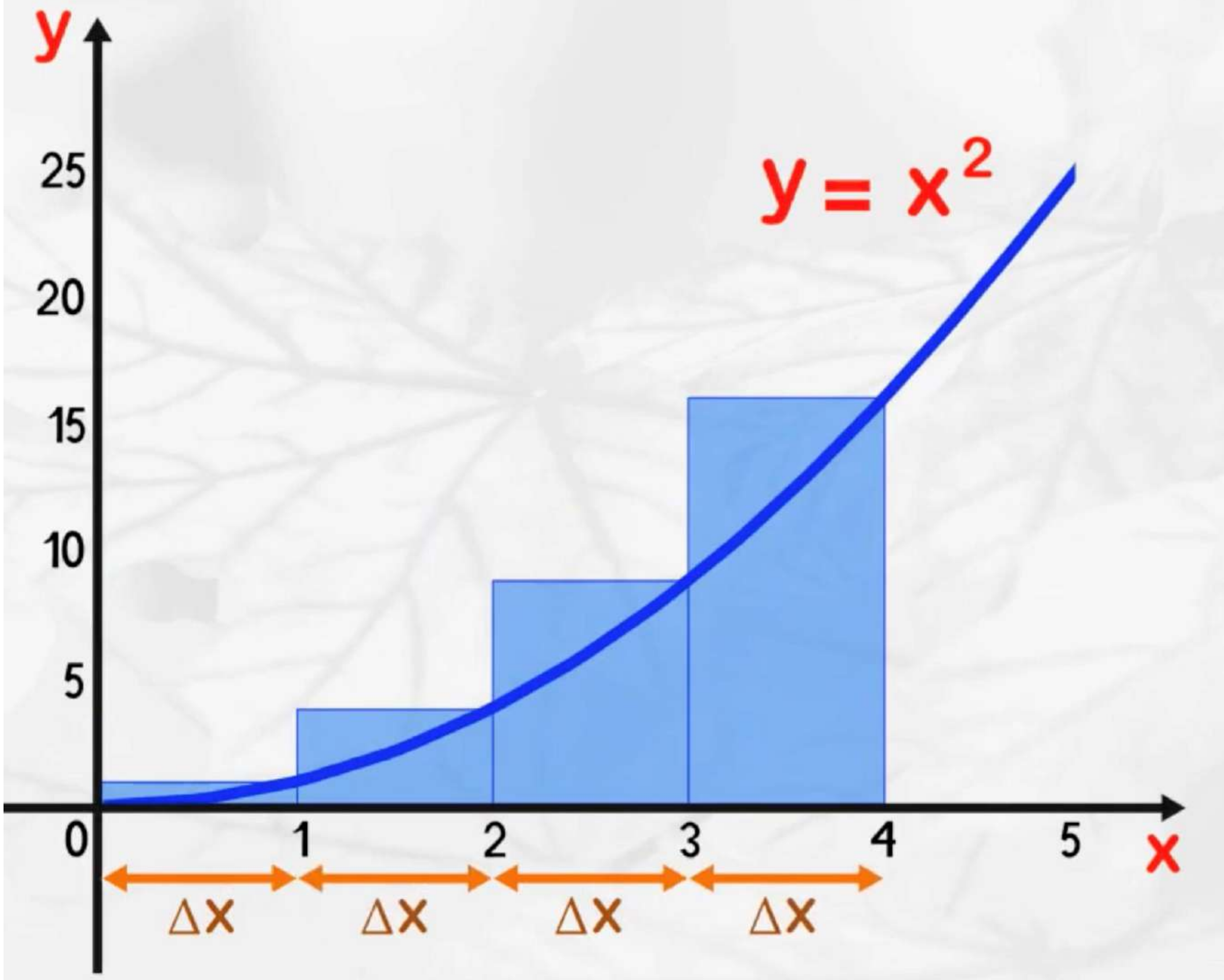
Jumlah Luas sub-interval:

$$L\blacksquare = L\blacksquare_1 + L\blacksquare_2 + L\blacksquare_3 + L\blacksquare_4$$

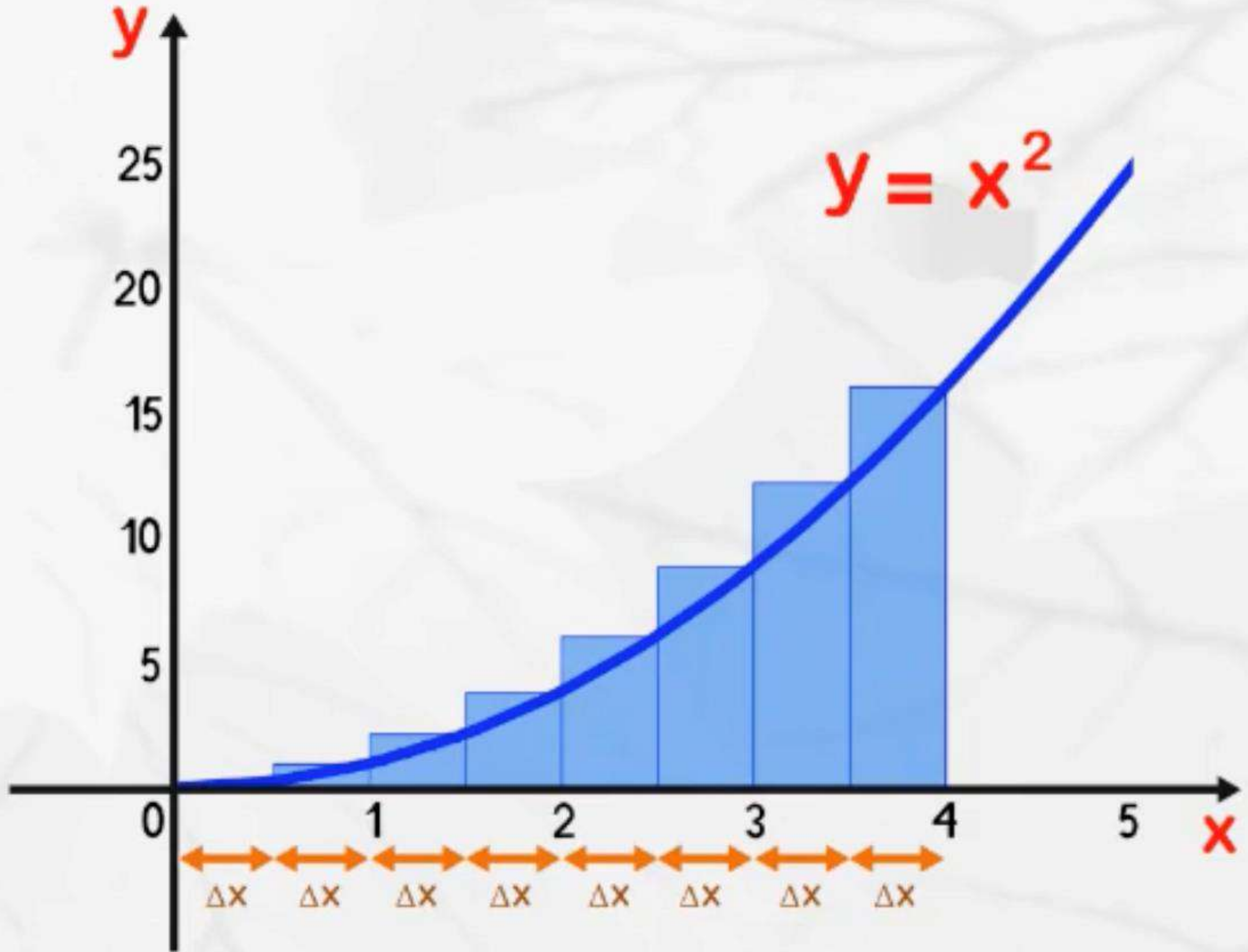
$$= 30$$


y
25
20
15
10
5
0
y = x²
1
2
3
4
5
x
Δx
Δx
Δx
Δx

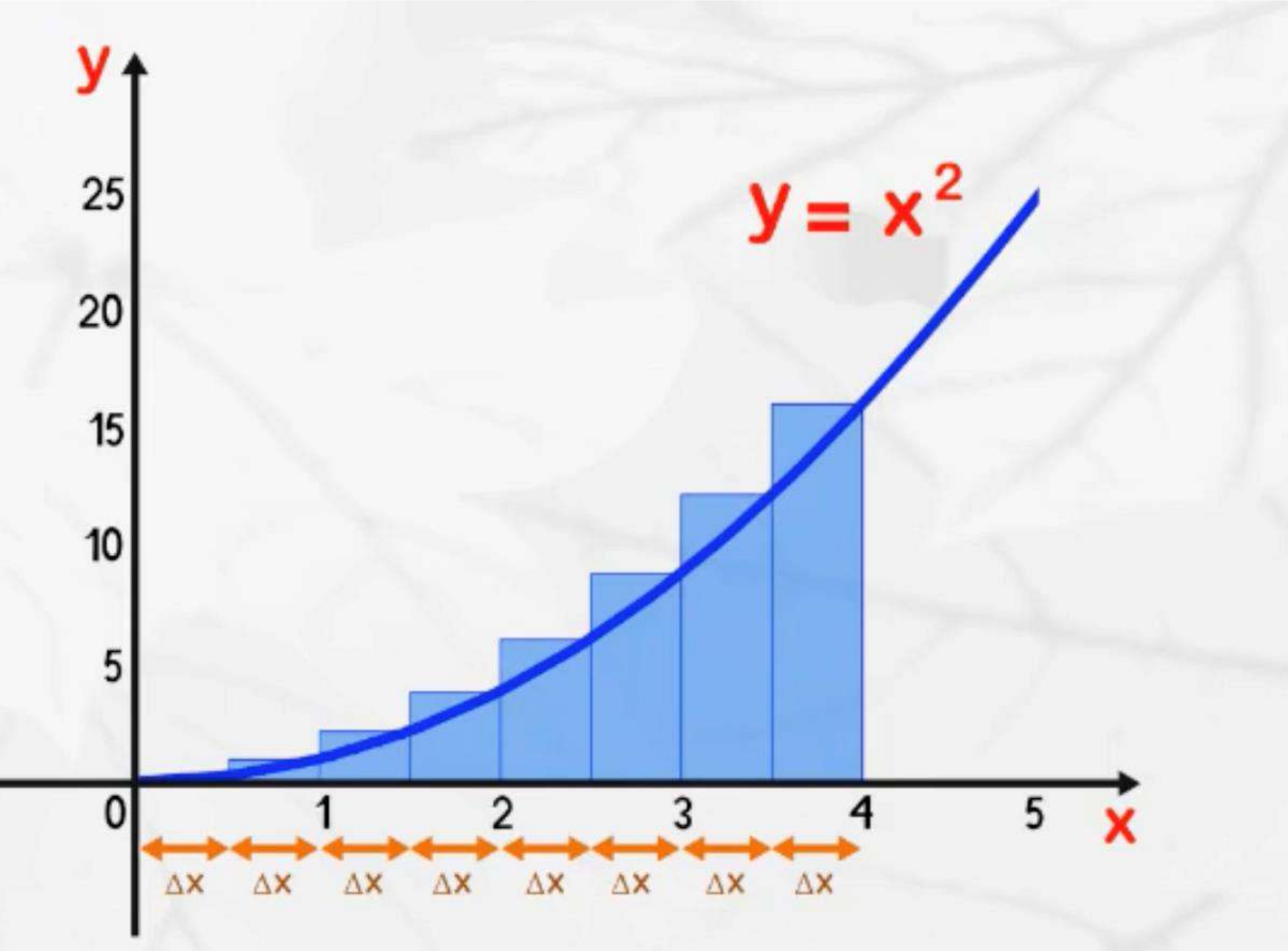

y
25
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
x
y = x²
Δx
Δx
Δx
Δx



y
25
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
x
y = x²
Δx
Δx
Δx
Δx



y
25
20
15
10
5
0
1
2
3
4
5
x
y = x2
Δx
Δx
Δx
Δx
Δx
Δx
Δx
Δx



Lebar sub-interval:

$$\Delta x = \frac{4-0}{8} = 0{,}5$$

Luas sub-interval:

$$L\blacksquare_1 = 0{,}5(0.5)^2 = 0.125$$
$$L\blacksquare_2 = 0{,}5(1.0)^2 = 0.5$$
$$L\blacksquare_3 = 0{,}5(1.5)^2 = 1.125$$
$$L\blacksquare_4 = 0{,}5(2.0)^2 = 2$$
$$L\blacksquare_5 = 0{,}5(2.5)^2 = 3.125$$
$$L\blacksquare_6 = 0{,}5(3.0)^2 = 4.5$$
$$L\blacksquare_7 = 0{,}5(3.5)^2 = 6.125$$
$$L\blacksquare_8 = 0{,}5(4.0)^2 = 8$$

Jumlah Luas sub-interval:

$$L\blacksquare = L\blacksquare_1 + L\blacksquare_2 + L\blacksquare_3 + L\blacksquare_4 + L\blacksquare_5 + L\blacksquare_6 + L\blacksquare_7 + L\blacksquare_8$$

$$= 25.5$$

Banyak (n)	Lebar (Δx)	Jumlah Luas
2	2	40.0000
4	1	30.0000
8	0.5	25.5000
16	0.25	23.3750
32	0.125	22.3438
64	0.0625	21.8359
128	0.03125	21.5840
256	0.015625	21.4585
512	0.0078125	21.3959
1024	0.00390625	21.3646

Kesimpulan Integral Riemann

- Kesimpulan bahwa : semakin banyak sub-interval, maka perhitungan "jumlah Riemann Kanan" akan semakin mendekati nilai dari luas yang sebenarnya

Metode Penyelesaian Integral

- Integral Substitusi

Rumus integral substitusi:

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C$$

Rumus integral substitusi trigonometri:

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} \quad \int \frac{dx}{a^2-x^2}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx$$

Contoh soal Integral substitusi

$$\int (x^2+2)\sqrt{x^3+6x-2} \qquad dx = \int (x^2+2)(x^3-6x-2)dx$$

Mis : $u = x^3 + 6x - 2$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 6$$

$$du = 3x^2 + 6\,dx$$

$$dx = \frac{1}{3x^2+6}du$$

$$\int (x^2+2)\sqrt{x^3+6x-2} \qquad dx = \int (x^2+2)(x^3-6x-2)dx$$

Mis : $u = x^3 + 6x - 2$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 6$$

$$du = 3x^2 + 6\,dx$$

$$dx = \frac{1}{3x^2+6}du$$

$$\int (x^2+2)u^{1/2}.\frac{1}{3x^2+6}du = \int (x^2+2)u^{1/2}.\frac{1}{3(x^2+2)}du =$$

$$\int (x^2+2)\sqrt{x^3+6x-2} \qquad dx = \int (x^2+2)(x^3-6x-2)dx$$

Mis : $u = x^3 + 6x - 2$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 + 6$$

$$du = 3x^2 + 6\,dx$$

$$dx = \frac{1}{3x^2+6}du$$

$$\int (x^2+2)u^{1/2}.\frac{1}{3x^2+6}du = \int \cancel{(x^2+2)}u^{1/2}.\frac{1}{3\cancel{(x^2+2)}}du =$$

$$\int (x^2+2)\sqrt{x^3+6x-2} \qquad dx = \int (x^2+2)(x^3-6x-2)dx$$

Mis : $u = x^3+6x-2$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2+6$$

$$du = 3x^2+6\,dx$$

$$dx = \frac{1}{3x^2+6}du$$

$$\int (x^2+2)u^{1/2}.\frac{1}{3x^2+6}du = \int \cancel{(x^2+2)}u^{1/2}.\frac{1}{3\cancel{(x^2+2)}}du =$$

$$= \int u^{1/2}.\frac{1}{3}du$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{1/2}\ du$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{3/2}.u^{3/2}+C == \frac{1}{3}.\frac{2}{3}.u^{3/2}$$

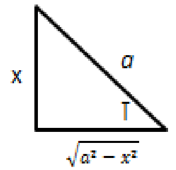
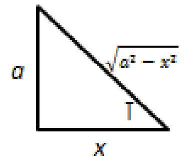
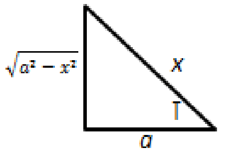
$$= \frac{2}{9}.(x^3+6x-2)^{3/2}+C$$

Contoh soal Integral substitusi trigonometri

Untuk sebuah integral:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

Substitusi yang sebaiknya dilakukan yaitu: $x = \sin(u)$, $dx = \cos(u)\, du$, sebab

BENTUK	PERMISALAN		SEGITIGA TRIGONOMETRI
	x	dx	
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a \sin\theta$	$dx = a \cos\theta\, d\,\theta$	
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a \tan\theta$	$dx = a \sec^2\theta\, d\,\theta$	
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a \sec\theta$	$dx = a \sec\theta \tan\theta\, d\,\theta$	

- $\sqrt{(1-\sin^2(u))} = \cos u$:
- $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(u)}\ \ \cos^2(u)\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\, du = \left(\frac{u}{2} \frac{\sin 2u}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$
- $= \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$

Integral parsial

Rumus integral parsial:

$$\int u\,dv = u.v - \int u\,du$$

Dalam pengintegralan, selain operasi biasa atau dengan teknik substitusi, ada teknik lain yaitu integral parsial. Teknik ini digunakan jika pada teknik sebelumnya tidak bisa digunakan. Teknik ini merupakan integral dari turunan hasil kali dua fungsi. Berikut ini adalah konsep integral parsial:

Jika $\mathrm{y} = \mathrm{U(x)}\,.\,\mathrm{V(x)}$, maka: $\frac{dy}{dx} = V(x).U',(x) + U(x).V',(x).$

$$dy = v(x).U'(x)dx + U(x).V'(x)\,dx$$

Jika y diganti *UV* maka: $d(UV) = V(x).U'(x)dx + U(x).V'(x)dx$

Karena diketahui bahwa $U'(x)dx = dU$ dan $V'(x)dx = dV$,

maka persamaan menjadi: $d(UV) = V.dU + U.dV$

Dengan mengintegralkan kedua ruas dalam persamaan diatas, diperoleh:

$$U.dV = d(UV) - V.dU$$

Rumus ntegral parsial:

Perlu diperhatikan untuk memilih U dan dV yang tepat agar pengintegralan memberikan hasil. (dV harus dipilih yang dapat diintegralkan dengan rumus, sedangkan yang lain menjadi U.

Dalam integral parsial, terkadang bisa menurunkan U dan mengintegralkan dV secara berulang. Jika terjadi proses yang berulang, maka proses dapat diringkas. Sebagai contoh $\int x^2 \cos x \; dx$ adalah

x^2	$\cos x \; dx$	
$2x$	$\sin x$	+
2	$-\cos x$	-
0	$-\sin x$	+
Diturunkan hingga 0	Diintegralkan hingga sisi kiri 0	

Maka diperoleh hasil:

$$= x^2 \sin x + 2x \; \cos x - 2 \sin x + C$$

Contoh Soal Integral Parsial dan Pembahasan

1. Tentukanlah hasil dari: $\int \cos^2 2x \sin 2x \, dx$

Pembahasan:

Misalkan $U = \cos 2x$ dan $\frac{dU}{dx} = -2 \sin 2x$, maka $dU = -2 \sin 2x \, dx$

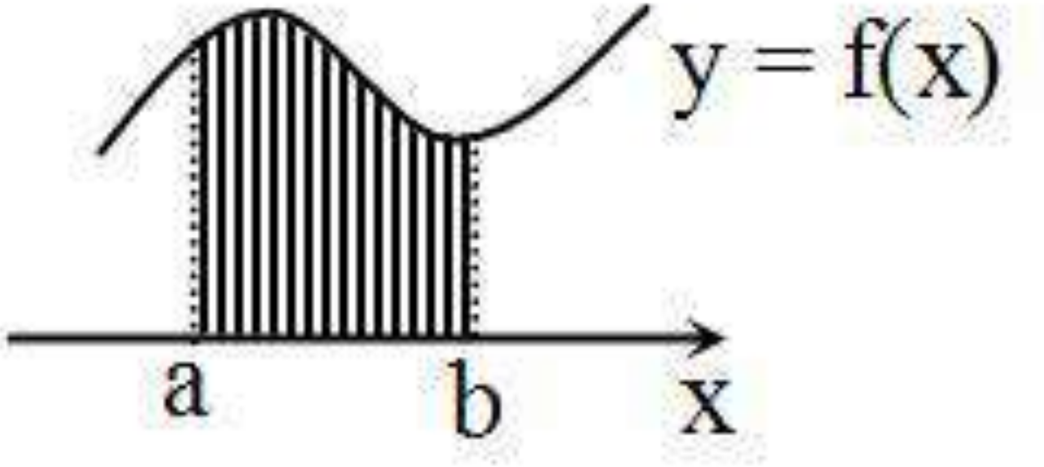
Sehingga, $-\frac{dU}{dx} = \sin 2x \, dx$, Kemudian $-\frac{U^3}{6}$

disubstitusi dengan nilai *U* menjadi : $-\frac{U^3}{6} = -\frac{\cos^3 2x}{6}$

Menghitung Luas Daerah Menggunakan Integral

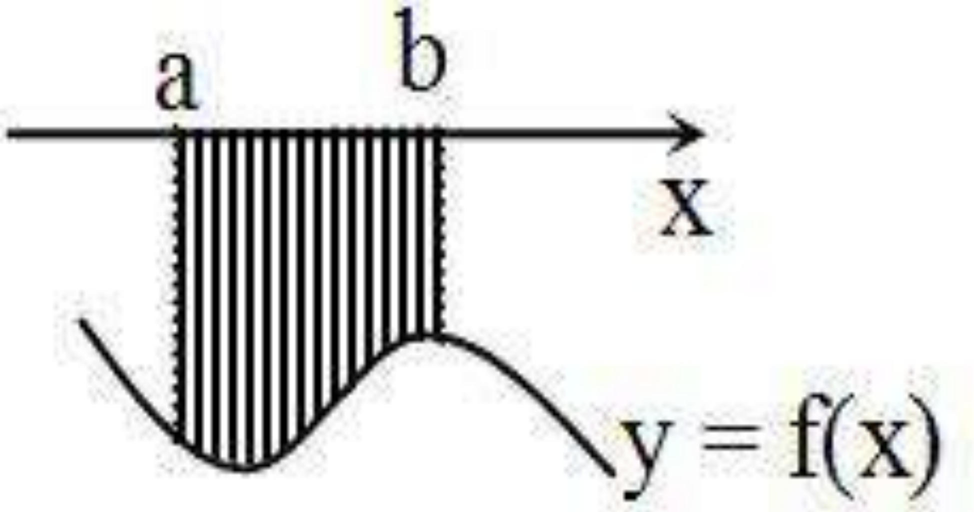
- Integral banyak sekali penggunaanya, seperti dalam menghitung luas daerah dibidang datar menggunakan integral,menghitung panjang busur, menghitung luas selimut benda putar, menghitung volume benda putar Untuk menghitung luas ini kita harus memahami apakah daerah yang dimaksud berada di atas kurva, di bawah kurva, di atas sumbu x ataupun di bawah sumbu x. Untuk itulah maka kita perlu memahami gambar kurva

Untuk lebih jelasnya perhatikan kasus-kasus berikut:



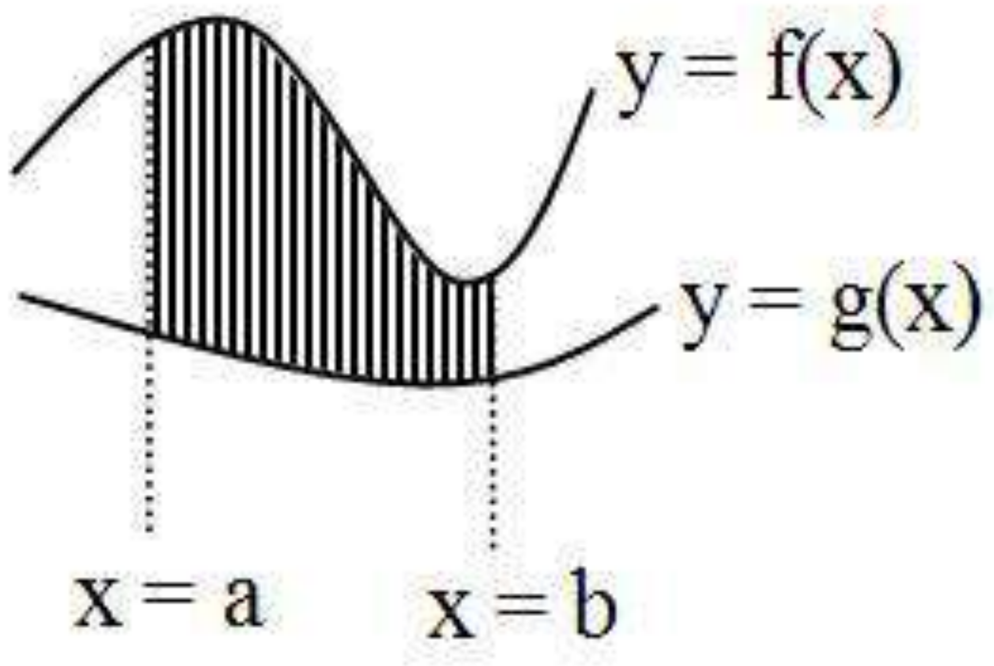
$$L = \int_a^b f(x)\,dx$$

Jika kurva berada di bawah sumbu x maka metodanya adalah



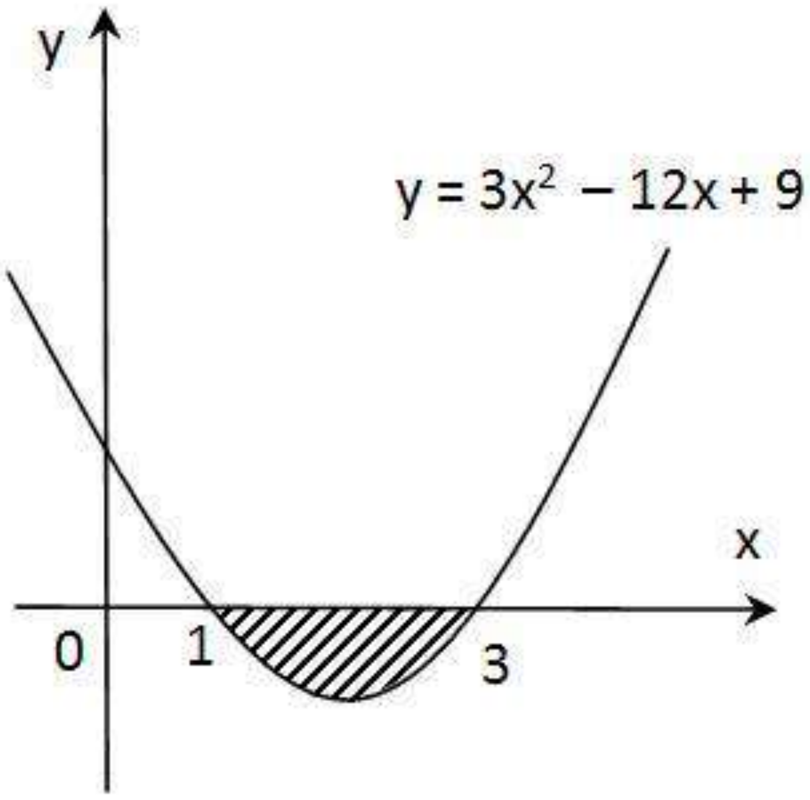
$$L = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Jika di antara dua kurva maka caranya sebagai berikut



$$L = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx$$

Contoh soal 1 :



Jawab:

$$L = -\int_1^3 (3x^2 - 12x + 9)dx = \int_1^3 (-3x^2 + 12x - 9)dx$$

$$L = -x^3 + 6x^2 - 9x \Big|_1^3$$

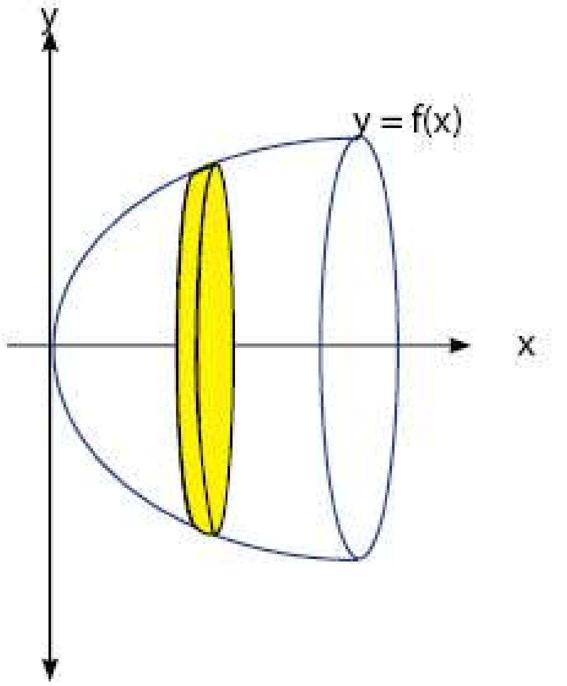
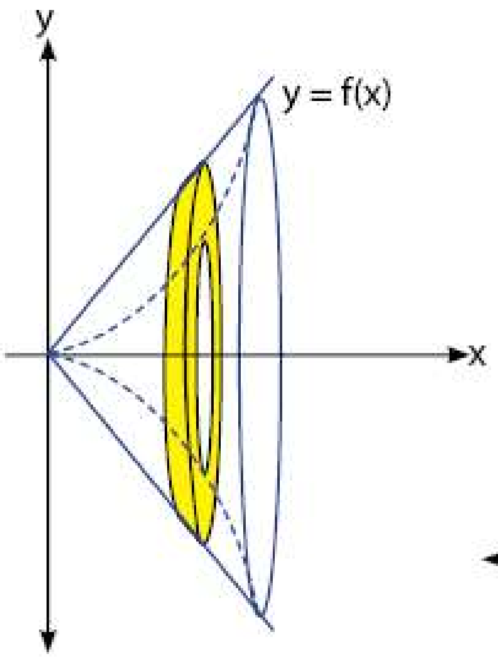
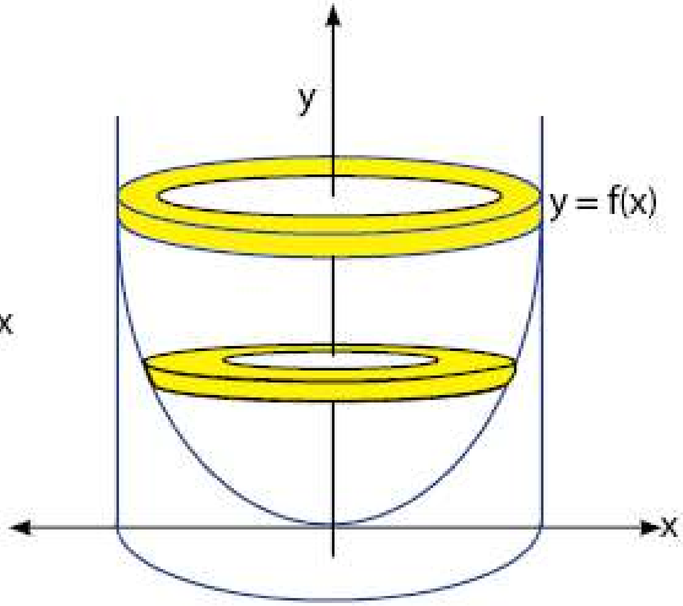
L = -3³ + 6.3² – 9.3 – (-1³ + 6.1² – 9.1)

L = -27 + 54 – 27 – (-1+ 6 – 9) = 0 – (-4) = 4

Carilah Luas daerah yang di arsir !

Aplikasi Integral: Mencari Volume Benda Putar

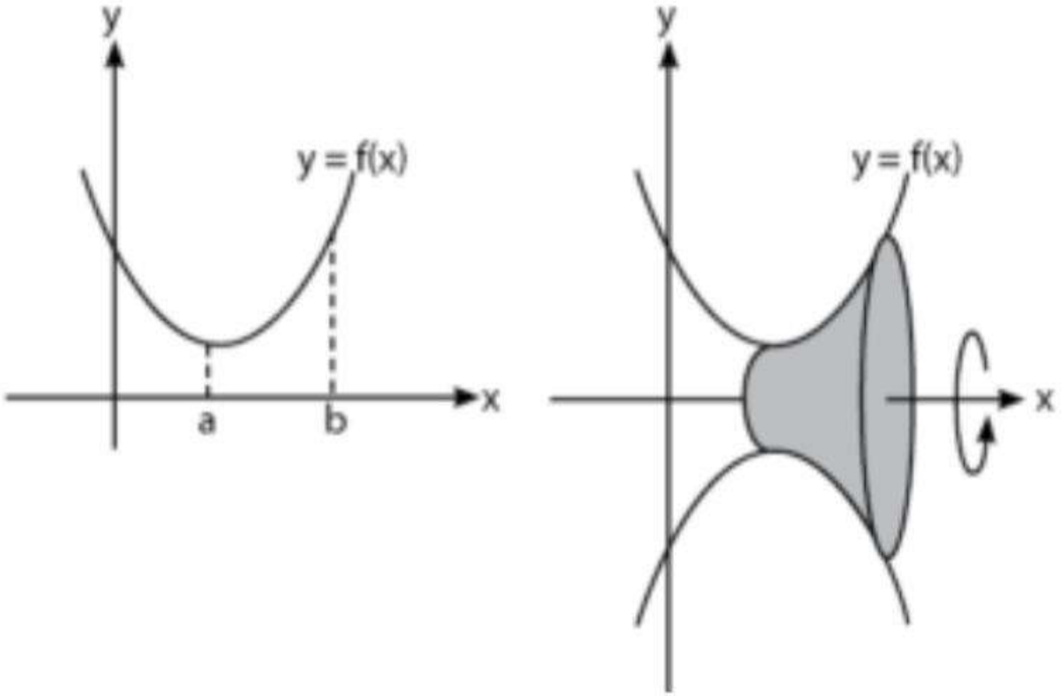
- Selain untuk menentukan luas daerah yang dibatasi kurva, aplikasi integral juga dapat digunakan untuk menghitung volume benda yang dibatasi kurva. Volume yang diperoleh dari hasil luas daerah yang diputar dengan cara tertentu akan menghasilkan sebuah volume yang sering disebut dengan volume benda putar. Cara memutar luas daerah tersebut bisa dengan sumbu x sebagai poros, sumbu y sebagai poros, atau sebuah persamaan garis yang sebagai poros.
- Seperti yang telah disebutkan sebelumnya bahwa luas daerah yang dibatasi kurva akan membentuk volume jika daerah yang dibatasi kurva tersebut diputar mengelilingi sumbu – x, sumbu y, atau sebuah persamaan garis lurus. Berikut ini akan diberikan gambar ilustrasi luas daerah yang dibatasi sebuah kurva dan diputar mengelilingi sumbu x, luas daerah yang dibatasi dua buah kurva dan diputar mengelilingi sumbu x, serta luas daerah yang diputar mengelilingi sumbu y.


y
y = f(x)
x

y
y = f(x)
x

y
y = f(x)
x

Volume Benda Putar Mengelilingi Sumbu x

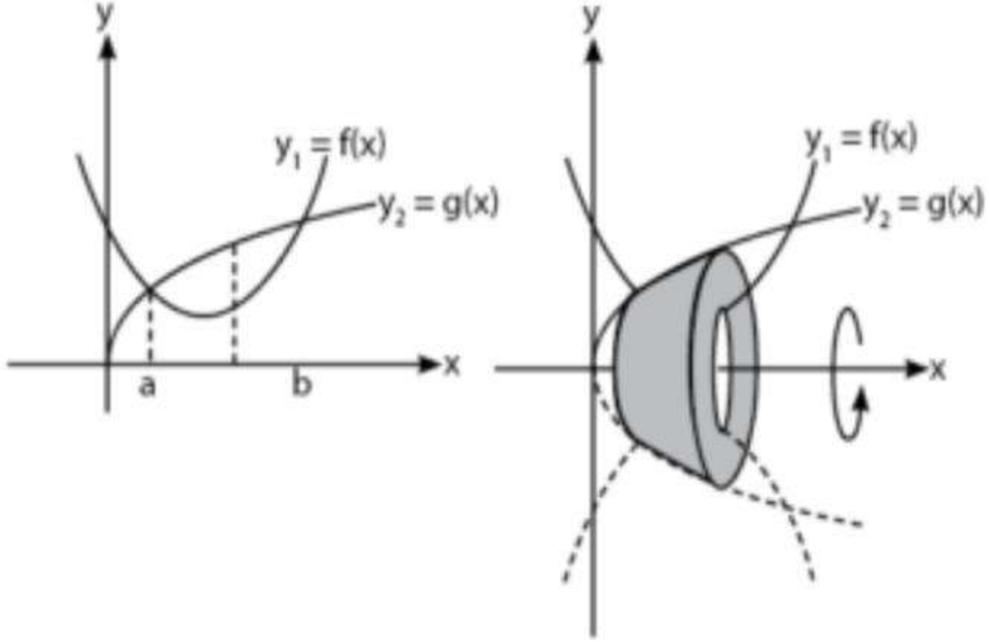
- Kasus volume benda putar yang diputar mengelilingi sumbu x dibagi menjadi dua permasalahan. Permasalahan pertama, volume benda putar yang dibatasi sebuah kurva. Kasus yang kedua adalah volume benda putar yang dibatasi dua buah kurva.

Volume benda putar pada interval $a \leq x \leq b$ yang di putar mengelilingi sumbu x



$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Volume benda putar pada interval $a \leq x \leq b$ yang di putar mengelilingi sumbu *x* dan dibatasi kurva *f(x)* dan *g(x)*

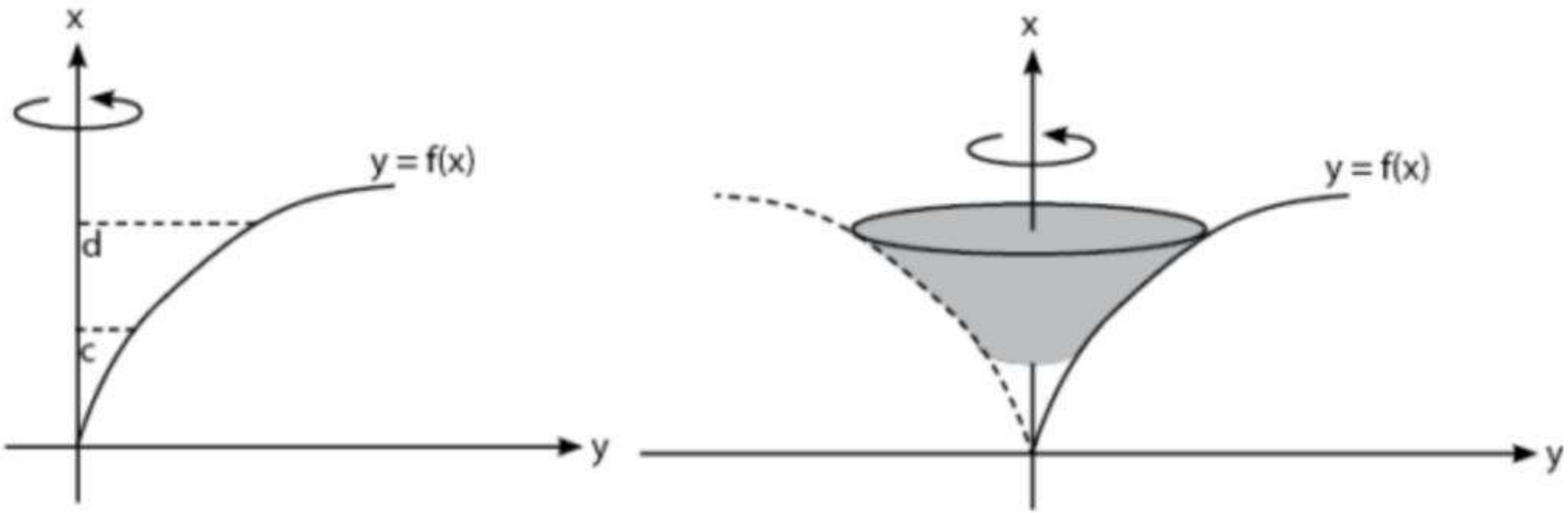


$$V = \pi \int_a^b \left(((f(x))^2 \right) - \left((g(x))^2) \right) dx$$

Volume benda putar yang mengelilingi sumbu y

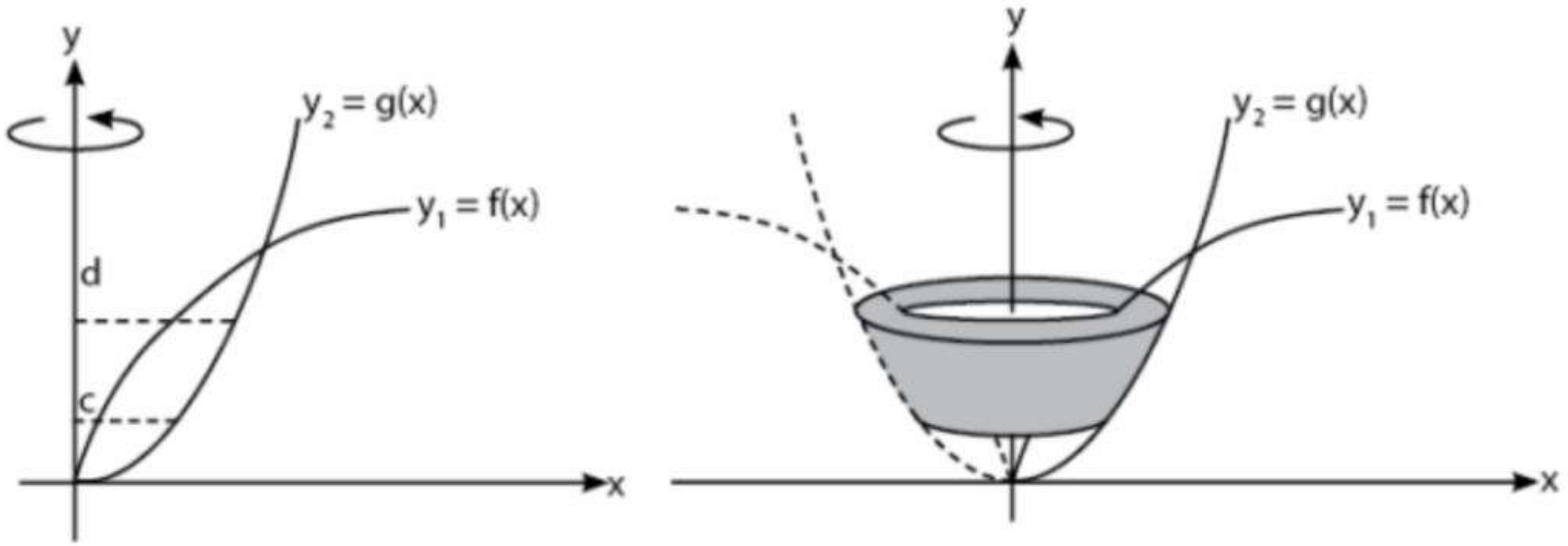
- Seperti halnya volume benda putar yang diputar mengelilingi sumbu x, volume benda putar yang diputar mengelilingi sumbu y juga dibedakan menjadi dua jenis kasus. Pertama, volume benda putar yang dibatasi sebuah kurva dan diputar mengelilingi sumbu y. Kedua, volume benda putar yang dibatasi dua buah kurva dan diputar mengelilingi sumbu y.

Volume benda putar pada interval $a \leq x \leq b$ yang di putar mengelilingi sumbu y



$$V = \pi \int_{c}^{d} (f(y))^2 dx$$

Volume benda putar pada interval $a \le x \le b$ *yang di putar mengelilingi sumbu x dan dibatasi kurva f(y) dan g(y)*



$$V = \pi \int_a^b \left(((f(y))^2 \right) - \left((g(y))^2) \right) dx$$

Contoh Soal dan Pembahasan

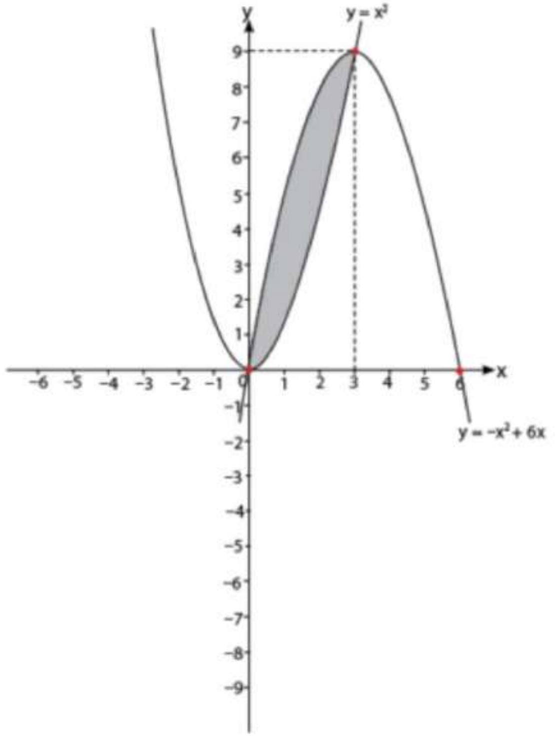
Hitunglah volume benda putar yang terbentuk dari daerah yang dibanta oleh kurva $y = x^2$ dan $y = -x^2 + 6x$ jika diputar terhadap sumbu x?

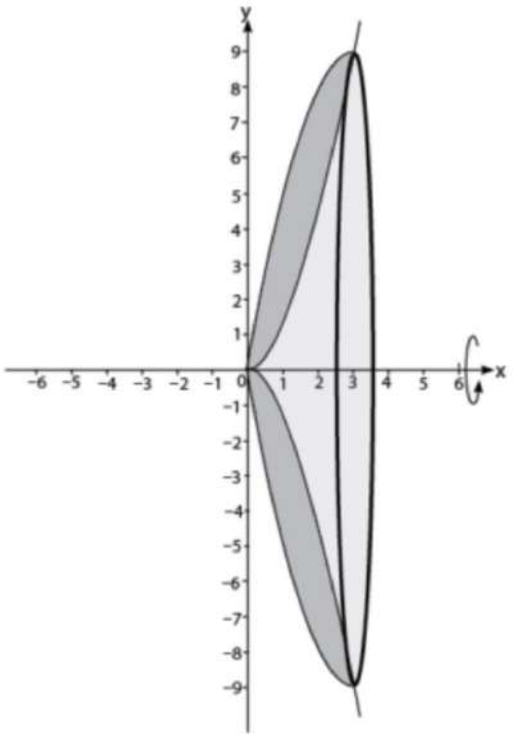
- A. 729π satuan volume
- B.243π satuan volume
- C. 81π satuan volume

Pembahasan:

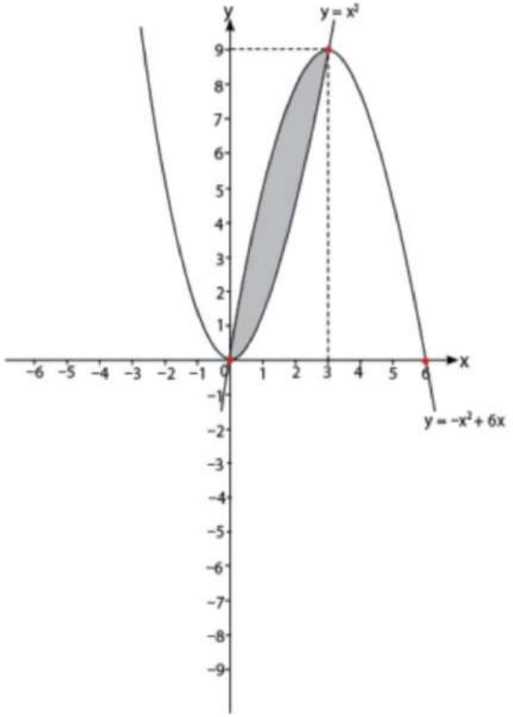
- Untuk menyelesaikan soal diatas, yang perlu kita lakukan adalah membuat sketsa grafik dari kedua persamaan untuk mengetahui batas pengintegralan.

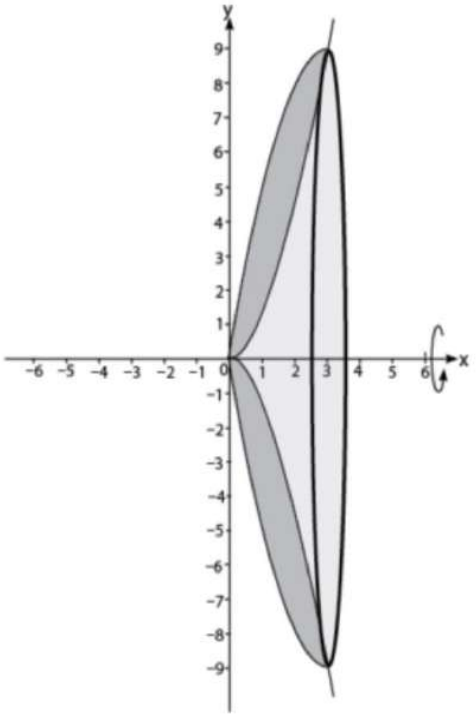
Sketsa gambar dari $y = x^2$ dan $y = -x^2 + 6x$ adalah sebagai berikut.





Pembahasan:





Jadi, volume daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan $y = -x^2 + 6x$ adalah

$$V = \pi \int_0^3 (y_1^2 - y_2^2)dx = \pi \int_0^3 ((-x^2 + 6x)^2) - (x^2)^2)dx$$

$$= \pi \int_0^3 (x^4 + 12x^3 + 36x^2 - x^4)dx = \pi \int_0^3 (12x^3 + 36x^2)dx$$

$$\pi \left[\frac{-12}{4}x^4 + \frac{36}{3}x^3\right]_0^3$$

$$\pi[-3x^4 + 12x^3]_0^3$$

$$\pi[(-3(3)^4 + 12(3)^3) - (-3(0)^4 + 12(0)^3)]$$

$$\pi[(-3(81) + 12(27)) - 0]$$

$$\pi[(-243 + 324)]$$

$$= 81\pi \; Satuan \; Volume$$

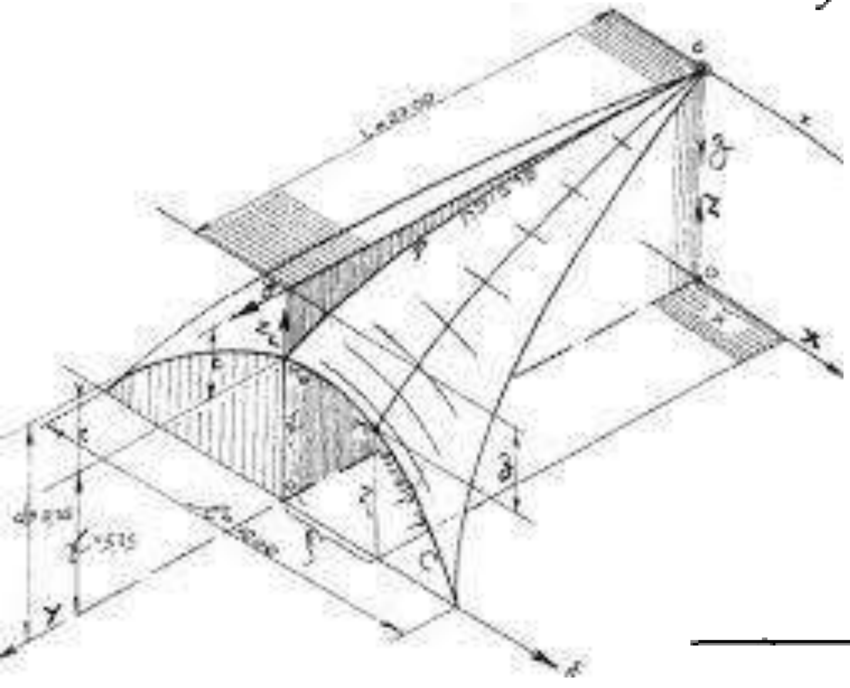
Jawaban: C

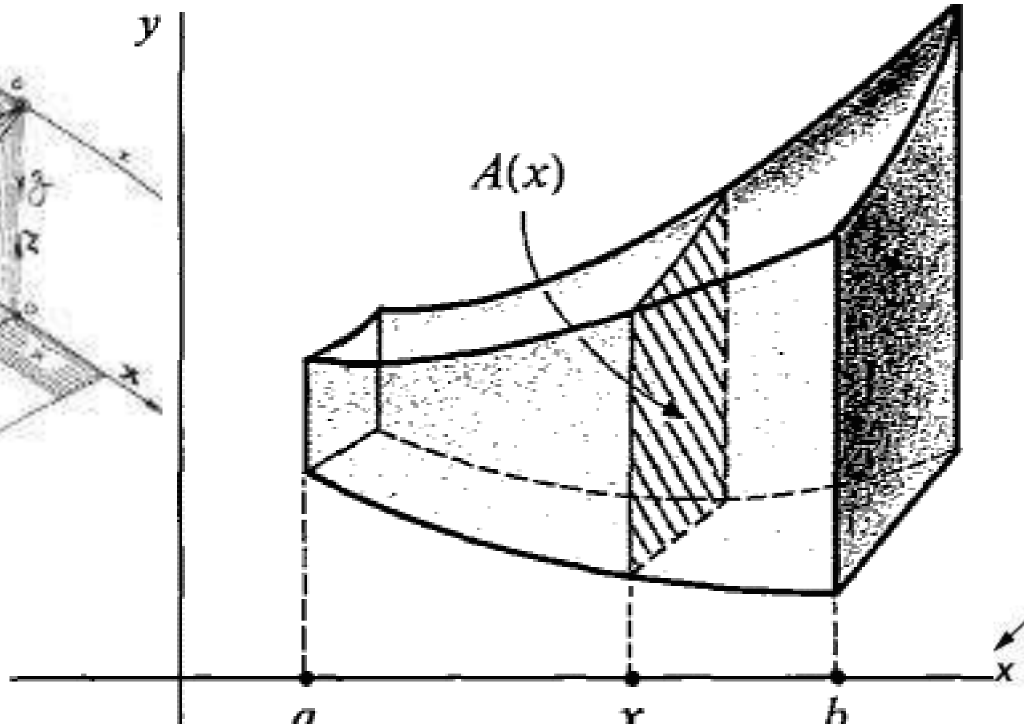
Aplikasi dan Penerapan Integral Dalam Arsitektur

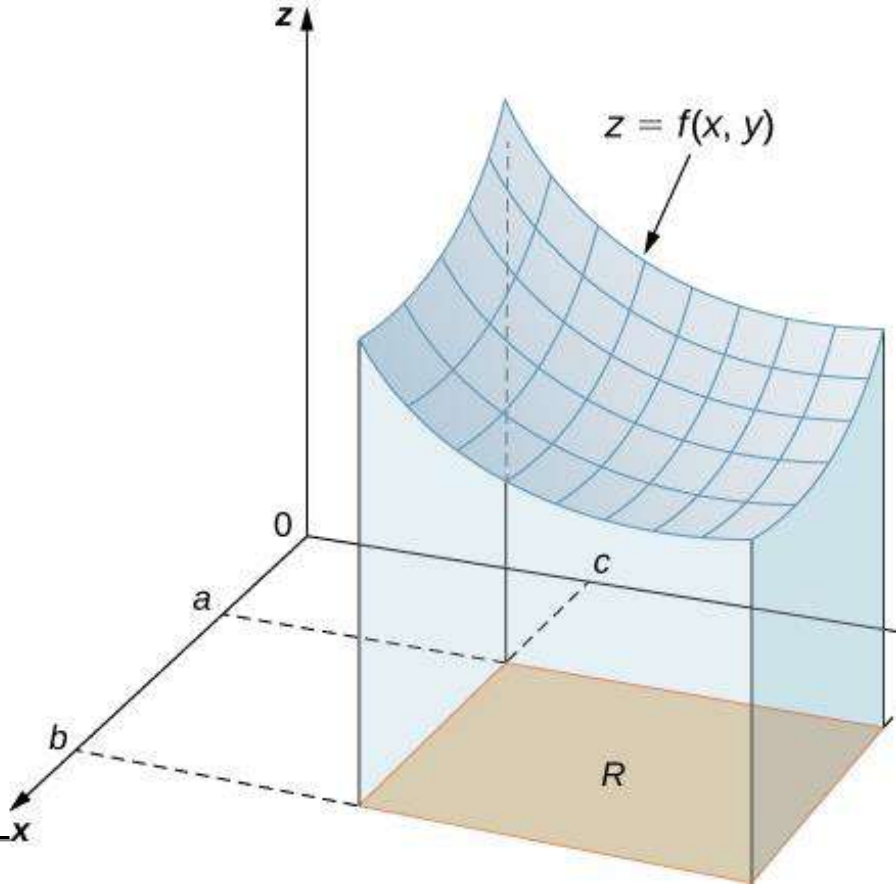
Aplikasi dan Penerapan Integral Dalam Arsitektur

Kalkulus banyak digunakan untuk menghitung kehilangan panas bangunan, luas dan massa struktur bentuk geometris yang sulit, untuk meminimalkan atau memaksimalkan luas bangunan yang dirancang (untuk mencari kehilangan panas panas pada siang hari, yang perlu Anda lakukan hanyalah membuat grafik (kehilangan panas vs. waktu) dan menghitung luas di bawah kurva menggunakan integral).

Integral dimanfaatkan dalam berbagai bidang. Pada bidang matematika, teknik, dan Arsitektur, integral digunakan untuk menghitung volume benda putar, dan luasan pada kurva.







Struktur seperti pada gambar di sebelah kiri (Sydney Opera House) dibuat dengan sejumlah cangkang yang saling berhubungan dan disangga oleh beton. Jadi, kepadatan setiap cangkang mungkin berbeda. Oleh karena itu, lebih sulit untuk menemukan massa jenis total struktur. Dan di sinilah kalkulus dapat diterapkan menggunakan kalkulus Integral untuk menghitung massa total.

Section 1

Integral

$$\int_{-4.5}^{-2.4} \frac{1}{2}\,\pi\left(-\frac{1}{10}\,(x+3.75)^2+2.7\right)^2 d\,x = 23.2472$$

Section 2

Integral

$$\int_{-2.4}^{-0.5} \frac{1}{2}\,\pi\left(-0.08\,(x+3)^2+3.65\right)^2\,dx = 35.2456$$

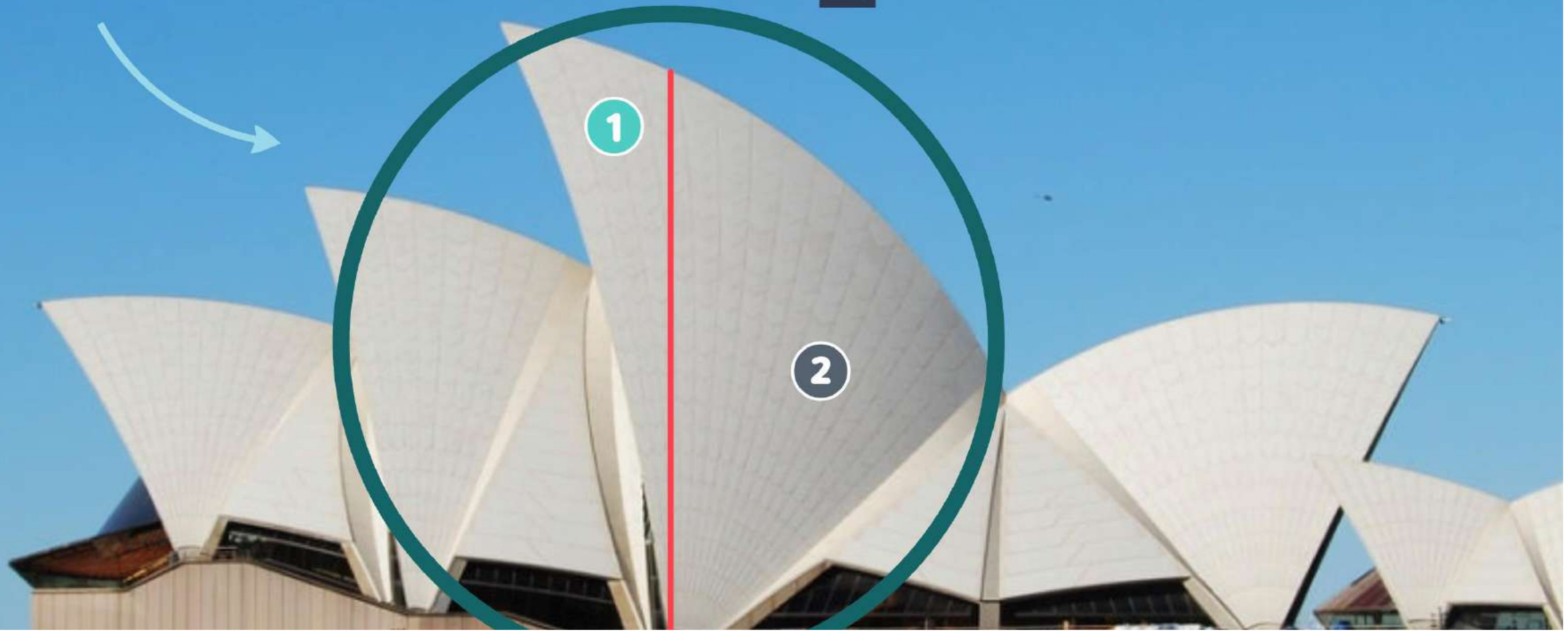
Section 3

Integral 1

$$\int_{-1.1}^{0} \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{18}\left(2\sqrt{-81x^2-243x+1834}-1\right)+0.9(x+1.8)^3-5.3\right)^2 dx = 7.79546$$

Integral 2

$$\int_{0}^{3} \frac{1}{2}\pi\left(-\frac{6}{5}+\frac{1}{18}\left(-1+2\sqrt{1834-243x-81x^2}\right)+\frac{9}{5}\sin\left(7-\frac{2x}{5}\right)\right)^2 dx = 44.1674$$



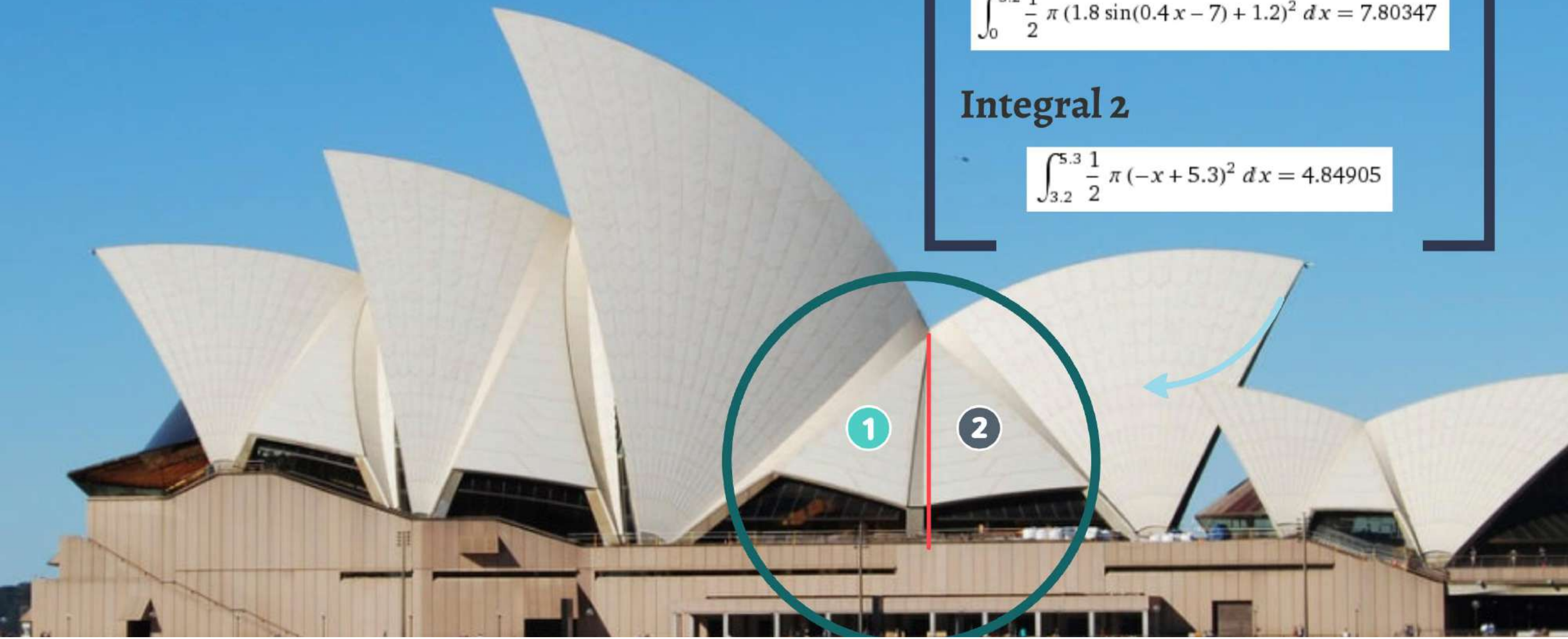
Section 4

Integral 1

$$\int_0^{3.2} \frac{1}{2}\,\pi\,(1.8\sin(0.4\,x-7)+1.2)^2\,dx = 7.80347$$

Integral 2

$$\int_{3.2}^{5.3} \frac{1}{2}\,\pi\,(-x+5.3)^2\,dx = 4.84905$$



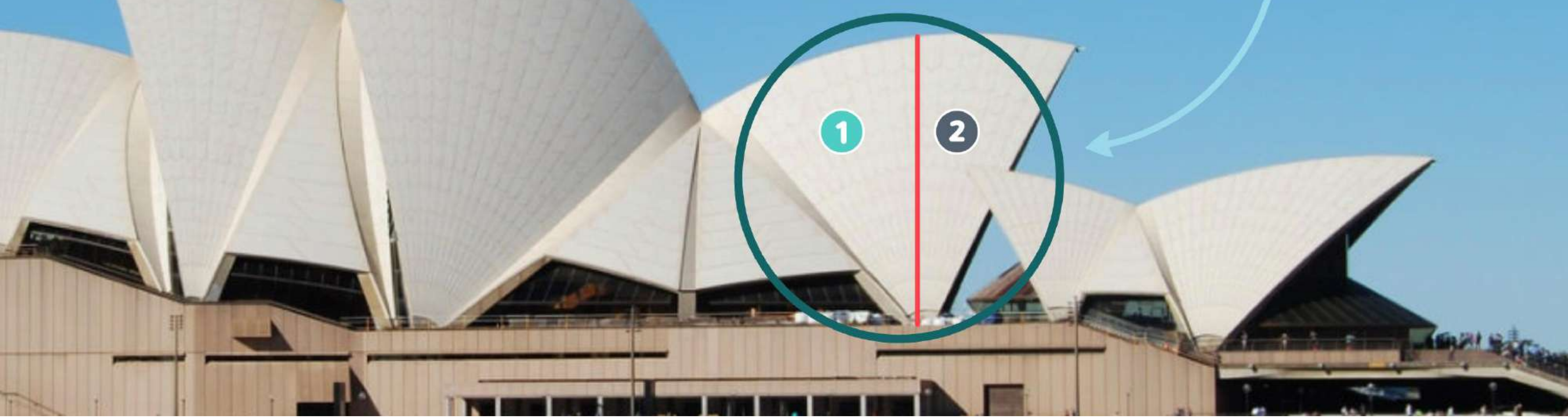
Section 5

Integral 1

$$\int_{3.2}^{5.3} \frac{1}{2}\,\pi\left((1.8\sin(0.4x-7)+1.2)-(-x+5.3)\right)^2\,dx = 10.8458$$

Integral 2

$$\int_{5.3}^{6.7} \frac{1}{2}\,\pi\left((1.8\sin(0.4x-7)+1.2)-2.1(x-5.4)\right)^2\,dx = 8.10375$$



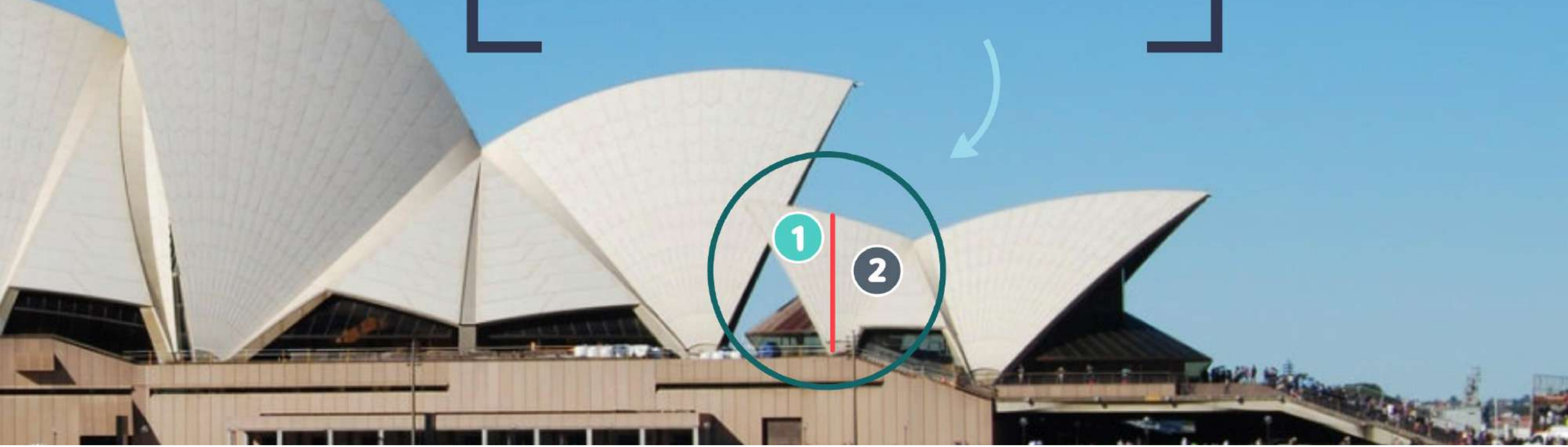
Section 6

Integral 1

$$\int_{5.6}^{6.6} \frac{1}{2}\,\pi \left(\left(-0.12\,(x-5.7)^2+1.7\right)-(-1.7\,x+11.203)\right)^2 d\,x = 1.43946$$

Integral 2

$$\int_{6.6}^{7.4} \frac{1}{2}\,\pi \left(\left(-0.12\,(x-5.7)+1.7\right)-\left(-\frac{3}{1.7\,x-10}+2.4\right)\right)^2 d\,x = 0.985323$$



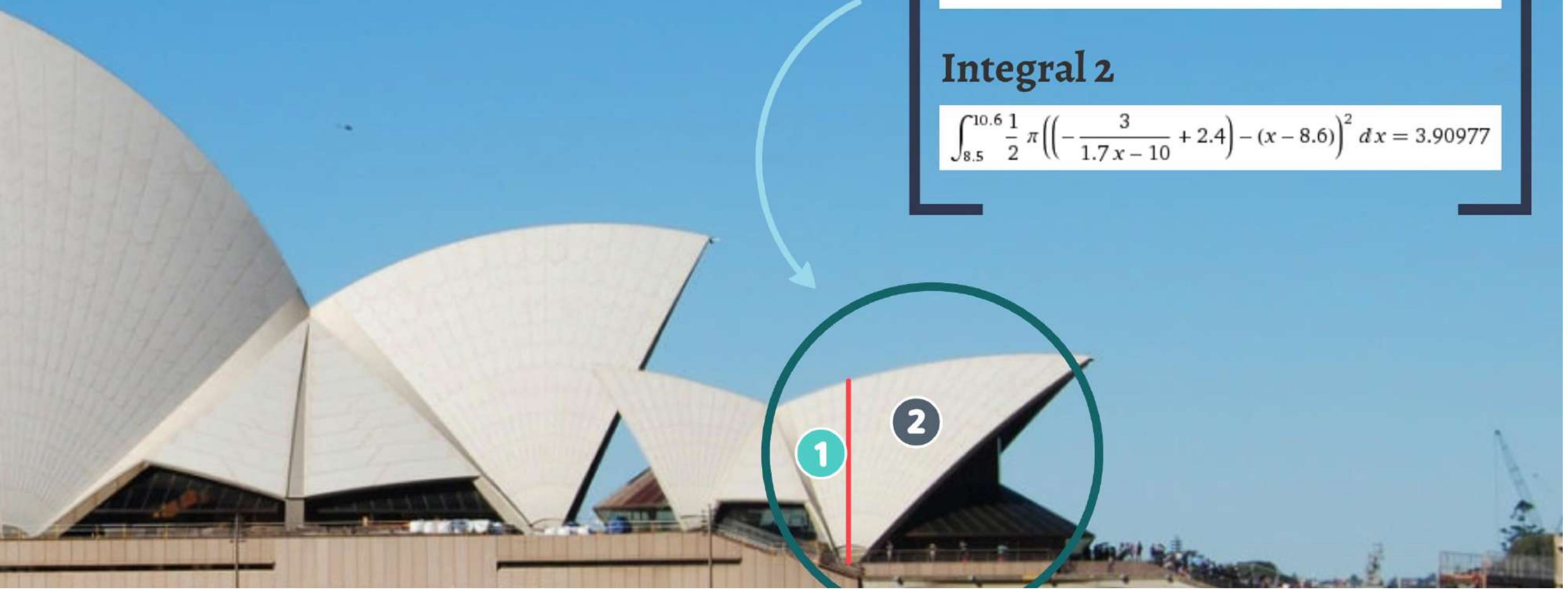
Section 7

Integral 1

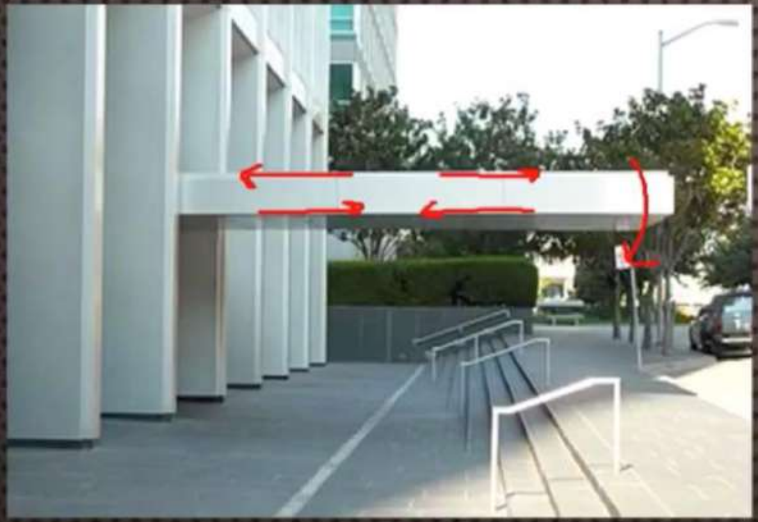
$$\int_{6.6}^{8.5} \frac{1}{2}\,\pi\left(-\frac{3}{1.7x-10}+2.4\right)^2 dx = 4.9203$$

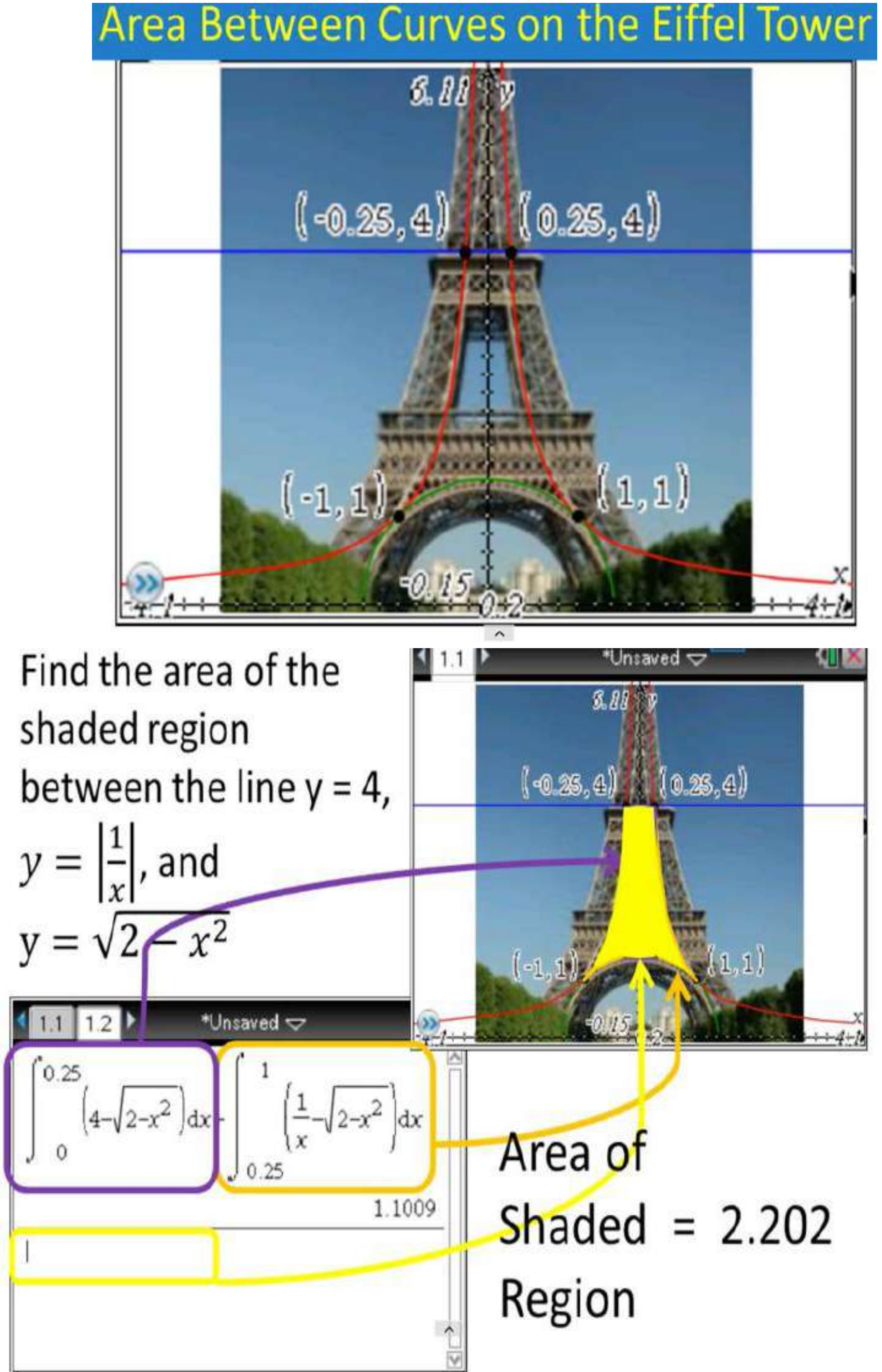
Integral 2

$$\int_{8.5}^{10.6} \frac{1}{2}\,\pi\left(\left(-\frac{3}{1.7x-10}+2.4\right)-(x-8.6)\right)^2 dx = 3.90977$$

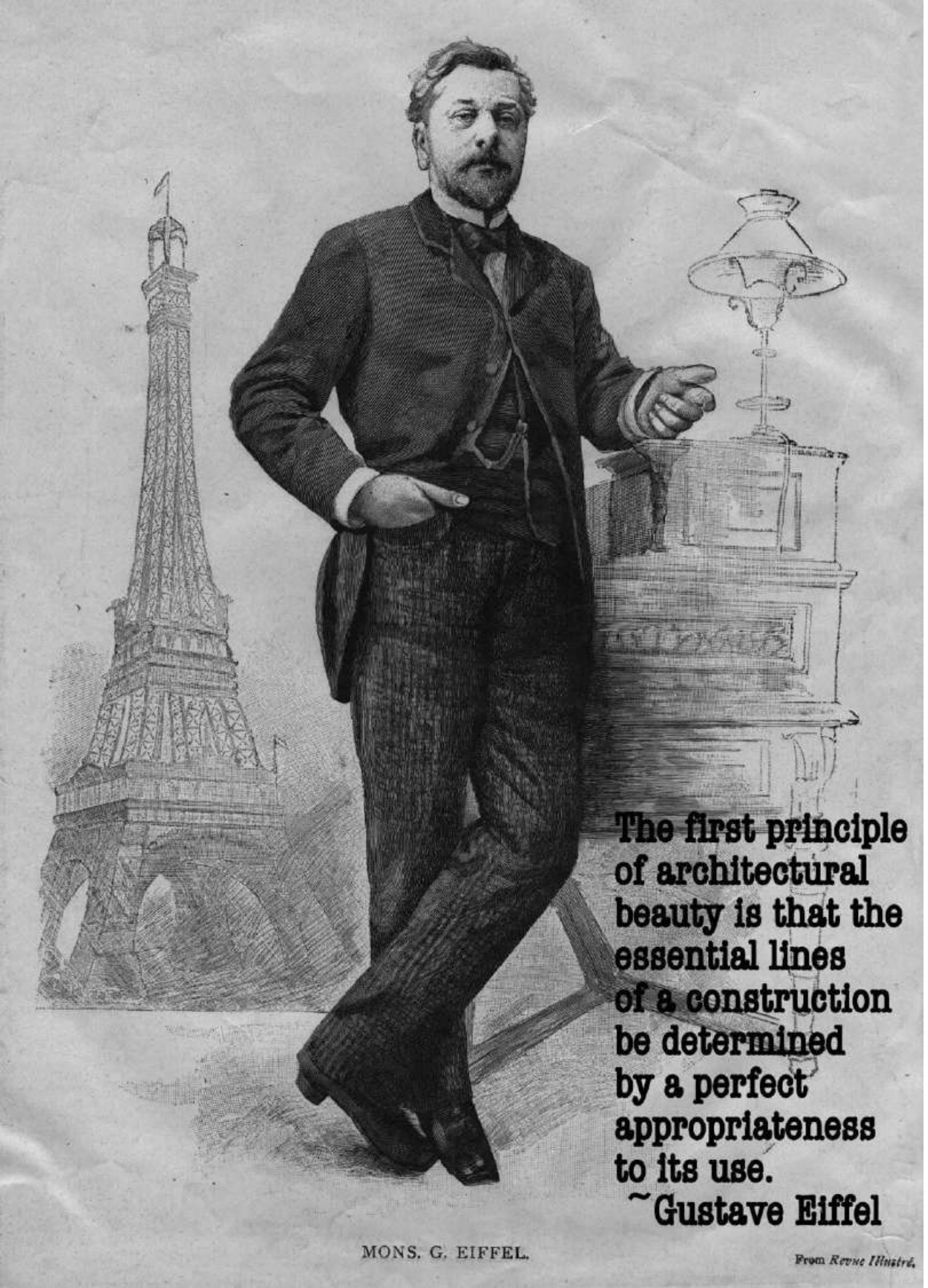


Arsitek juga menggunakan kalkulus **Integral** untuk menghitung jumlah bahan yang dibutuhkan untuk konstruksi dan jenis sistem pendukung yang diperlukan untuk mencegah konstruksi runtuh





Bahkan menara Eiffel dibangun dengan mempertimbangkan kalkulus, berfokus secara eksklusif pada hambatan angin. Dan Gustav Eifel sangat bangga dengan karyanya yang dihasilkan dari perhitungan matematis, seperti yang dia katakan:

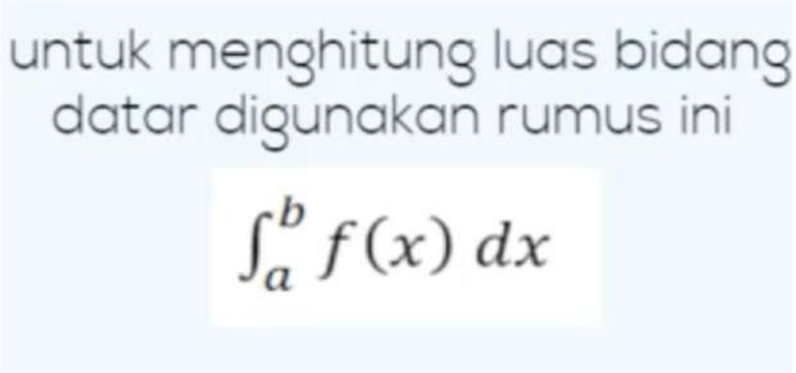


Bahkan menara Eiffel dibangun dengan mempertimbangkan kalkulus, berfokus secara eksklusif pada hambatan angin. Dan Gustav Eifel sangat bangga dengan karyanya yang dihasilkan dari perhitungan matematis.

Contoh Soal Aplikasi dan Penerapan Integral Dalam Arsitektur :

- Contohnya jika ada sebuah bidang tanah yang akan dihitung luasnya untuk dibangun bangunan yang dibatasi oleh bangunan lain dengan kata lain bidang datar yang dibatasi oleh garis dimana garis tersebut:

y=2x+2, x=1 dan x=3



Penyelesaian:

$$L = \int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_1^3 (2x+2)dx = |x^2 + 2x|_1^3$$

$$= (3^2 + 2.3) - (1^2 + 2.1)$$

$$= (9+6) - (1+2)$$

$$= 15 - 3$$

$$= 12\ satuan\ luas$$

- Ketika kita harus mencari volume kubah masjid yang daerahnya dibatasi oleh fungsi $fx=4-x^2$. Sumbu *x* diputar $360°$ terhadap sumbu *x*

$$V = \pi \int_a^b x^2 \, dy \quad \text{atau}$$

$$V = \pi \int_a^b [f(y)]^2 \, dy$$

Penyelesaian:

$$= \pi \int_a^b x^2 dx = \pi \int_0^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx$$

Type equa

$$= \pi \left[16x - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 \right] \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}$$

$$= \pi \left[16(2) - \frac{8}{3}(2)^3 + \frac{1}{5}(2)^5 \right] - 0$$

$$= \pi \left[32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right] - 0$$

$$= \frac{256}{15}\pi$$

Thank You…